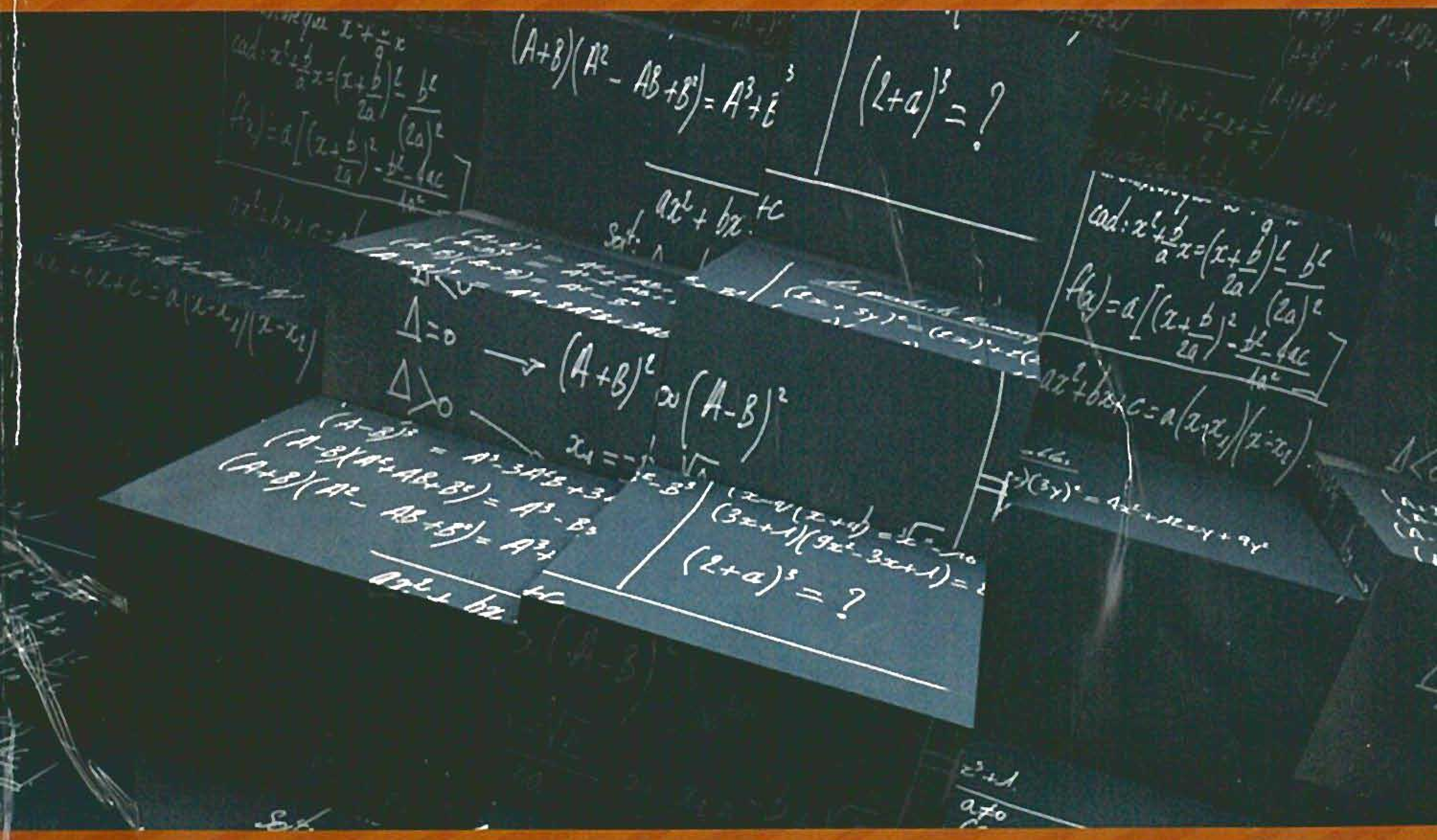
М. В. Фалалеев

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 2



Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Иркутский государственный университет»

Институт математики, экономики и информатики

М. В. Фалалеев

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В четырех частях
Часть 2

Учебное пособие

*Рекомендовано Иркутским региональным отделением
научно-методического совета по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов вузов,
обучающихся по направлениям подготовки
«Математика», «Прикладная математика и информатика»,
«Информационная безопасность»*

ИРКУТСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИГУ
2013

УДК 517(075.8)
ББК 22.16
Ф19

Печатается по решению ученого совета ИМЭИ

Издание выходит в рамках Программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «ИГУ» на 2012 2016 гг., проект Р121-02-001

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, профессор *Н. А. Сидоров*, д-р физ.-мат. наук, зав. отделением нелинейных динамических систем и дифференциальных уравнений ИДСТУ СО РАН *А. А. Щеглова*

Ф19 **Фалалеев М. В.**
Математический анализ. В 4 ч. Ч. 2 : учеб. пособие / М. В. Фалалеев. – Иркутск : Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2013. – 139 с.
ISBN 978-5-9624-0824-8 (ч. 2)
ISBN 978-5-9624-0822-4

Вторая часть курса включает теорию интеграла Римана – Стилтьеса, элементы общей топологии и функционального анализа, дифференциального исчисления функций многих переменных.

Предназначено для студентов университетов, обучающихся по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Информационная безопасность».

Библиогр. 38 назв.

УДК 517(075.8)
ББК 22.16

ISBN 978-5-9624-0824-8 (ч. 2)
ISBN 978-5-9624-0822-4

Оглавление

Первые пять глав, а именно:

1. Введение;
2. Предел числовой последовательности;
3. Предел функции. Непрерывность функции;
4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной;
5. Интегральное исчисление функций одной переменной. Интеграл Римана

включены в первую часть курса.

6. Интегральное исчисление функций одной переменной. Интеграл Римана – Стилтьеса

6.1. Функции ограниченной вариации

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Осуществим разбиение T этого отрезка точками x_i

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n_T - 1} < x_{n_T} = b$$

и составим сумму абсолютных величин приращений функции $y = f(x)$

$$V = \sum_{i=1}^{n_T} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Определение. Если существует постоянная $K > 0$ такая, что для любого разбиения T отрезка $[a; b]$ справедливо неравенство $V \leq K$, то функцию $y = f(x)$ называют *функцией ограниченной вариации.* Верхняя грань значений сумм V по всем разбиениям T называется *полной вариацией* функции $y = f(x)$ и обозначается

$$V_a^b = \sup_T V.$$

Если $y = f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a; b]$ и этот отрезок поделен на части точкой c, $a < c < b$, то на каждом из отрезков $[a; c]$ и $[c; b]$ функция $y = f(x)$ также имеет ограниченную вариацию. Обратно, если функция $y = f(x)$ имеет ограниченные вариации на отрезках $[a; c]$ и $[c; b]$, то $y = f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a; b]$ и справедлива следующая

Теорема (о сумме полных вариаций). *Если функция $y = f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a; b]$ и $a < c < b$, то $V_a^b = V_a^c + V_c^b$.*

Доказательство. Осуществим разбиения отрезков $[a; c]$ и $[c; b]$

$$T_1 \equiv a = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{m_{T_1}-1} < y_{m_{T_1}} = c,$$

$$T_2 \equiv c = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_{k_{T_2}-1} < x_{k_{T_2}} = b$$

и составим соответствующие суммы V_1 и V_2. Объединение точек y_i и z_j в одну совокупность даст некоторое разбиение отрезка $[a; b]$, причем соответствующая этому разбиению сумма имеет вид $V = V_1 + V_2$. Тогда

$$V_a^b = \sup_T V \geq V_1 + V_2$$

(отсюда, в частности, вытекает ограниченность каждой из сумм V_1 и V_2, т. е. ограниченность вариации $y = f(x)$ на обоих отрезках $[a; c]$ и $[c; b]$.) Если выбрать последовательность разбиений T_1 такой, чтобы $V_1 \to V_a^c$, а последовательность разбиений T_2 такой, чтобы $V_2 \to V_c^b$ (что возможно по определению точной верхней грани), тогда из последнего неравенства в пределе (по свойству монотонности предела) получим $V_a^b \geq V_a^c + V_c^b$.

Теперь докажем обратное неравенство. Осуществим разбиение T отрезка $[a; b]$ и составим сумму V. Добавим в разбиение T точку c и составим для нового разбиения $T \cup \{c\}$ новую сумму V_*, тогда

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_r \leq c < x_{r+1} <$$

$$< \ldots < x_{n_T-1} < x_{n_T} = b,$$

$$V = \sum_{i=1}^{n_T} |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

$$V_* = \sum_{i=1}^{r} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(c) - f(x_r)| +$$

$$+ |f(x_{r+1}) - f(c)| + \sum_{i=r+2}^{n_T} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Очевидно $V_* \geq V$, так как V_* отличается от V на два слагаемых. Но V_* представима в виде суммы $V_1 + V_2$, здесь V_1 и V_2 относятся, соответственно, к отрезкам $[a; c]$ и $[c; b]$, тогда

$$V \leq V_* = V_1 + V_2 \leq \sup_{T_1} V_1 + \sup_{T_2} V_2 = V_a^c + V_c^b.$$

Далее, так же как выше, получаем $V_a^b \leq V_a^c + V_c^b$. Сопоставляя оба полученных неравенства, завершаем доказательство. **Теорема доказана.**

Теорема. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела ограниченную вариацию на $[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде разности двух неубывающих функций.*

Доказательство. *Необходимость.* Введем две функции

$$\varphi(x) = f(a) + V_a^x, \quad \psi(x) = V_a^x - f(x) + f(a),$$

тогда $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$. Но $\varphi(x)$ — неубывающая, поэтому осталось доказать, что $\psi(x)$ не убывает. Пусть x и y — две точки из отрезка $[a; b]$, причем $x < y$, тогда

$$\psi(y) = V_a^y - f(y) + f(a) = V_a^x + V_x^y - f(y) + f(a).$$

Отсюда

$$\psi(y) - \psi(x) = V_x^y - (f(y) - f(x)) \geq V_x^y - V_x^y = 0,$$

т. е. $\psi(y) \geq \psi(x)$. (Здесь мы воспользовались неравенством $V_a^b = \sup\limits_T V \geq f(b) - f(a)$, т. е. рассмотрено разбиение, состоящее из двух точек $x_0 = a$ и $x_1 = b$.)

Замечание 1. Приведенное здесь разложение функции $f(x)$ не является единственно возможным. Если прибавить к функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ произвольную неубывающую функцию, то получим новое разложение для $f(x)$.

В частности, прибавляя к $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ достаточно большую положительную константу, можно добиться того, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ станут положительными. Можно сделать $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ строго возрастающими.

Достаточность. Доказательство достаточности проведем в два этапа. А именно, покажем, что если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — неубывающие функции, то, во-первых, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют ограниченные вариации и, во-вторых, сумма $\varphi(x) + (-\psi(x))$ является функцией ограниченной вариации.

Действительно, если $\varphi(x)$ — неубывающая функция, то

$$V = \sum_{i=1}^{n_T} |\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n_T} (\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})) = \varphi(b)-\varphi(a),$$

тогда $V_a^b = \sup\limits_T V = \varphi(b) - \varphi(a)$, т. е. $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют ограниченные вариации.

Замечание 2. Случай невозрастающей функции сводится к рассмотренному простым изменением знаков.

Для некоторого разбиения T и функции $\varphi(x)+(-\psi(x))$ составим сумму

$$V = \sum_{i=1}^{n_T} |(\varphi(x_i) + (-\psi(x_i))) - (\varphi(x_{i-1}) + (-\psi(x_{i-1})))| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n_T} (|\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| + |\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})|) =$$

$$= V_1 + V_2 \leq \sup_T V_1 + \sup_T V_2.$$

Отсюда $\sup\limits_T V \leq \sup\limits_T V_1 + \sup\limits_T V_2$, т. е. функция $\varphi(x)+(-\psi(x))$ имеет ограниченную вариацию. **Теорема доказана.**

Приведем несколько примеров функций ограниченной вариации.

Пример 1. Всякая неубывающая, невозрастающая, возрастающая или убывающая на отрезке $[a; b]$ функция имеет на нем ограниченную вариацию. Доказательство приведено в предыдущей теореме. Например,

$$V_0^{50}(e^x) = e^{50} - e^0 = e^{50} - 1 \quad \text{или} \quad V_1^2(\ln x) = \ln 2.$$

Пример 2. Класс функций, *удовлетворяющих условию Дирихле*. Такое название носят функции $f(x)$, для которых можно разбить отрезок $[a; b]$ на конечное число частей так, чтобы в каждой из них $f(x)$ была монотонной. В силу вышеизложенных теорем всякая такая функция имеет ограниченную вариацию, поскольку имеет ограниченную вариацию на каждом интервале монотонности. Например,

$$V_0^{4\pi}(\cos x) = \left(V_0^{\pi} + V_{\pi}^{2\pi} + V_{2\pi}^{3\pi} + V_{3\pi}^{4\pi}\right)(\cos x) =$$
$$= (\cos 0 - \cos\pi) + (\cos 2\pi - \cos\pi) + (\cos 2\pi - \cos 3\pi) +$$
$$+ (\cos 4\pi - \cos 3\pi) = 2 + 2 + 2 + 2 = 8,$$
$$V_{-1}^{1}(x - x^3) = \left(V_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} + V_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + V_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\right)(x - x^3) =$$
$$= \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

Пример 3. Класс функций, *удовлетворяющих условию Липшица* на отрезке $[a; b]$. В этот класс входят функции, для которых существует константа $K > 0$ такая, что $\forall x', x'' \in [a; b]$ справедливо неравенство $|f(x'') - f(x')| \le \le K|x'' - x'|$. Действительно, применяя это неравенство к каждой паре соседних точек разбиения x_i и x_{i-1}, имеем

$$V = \sum_{i=1}^{n_T} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le \sum_{i=1}^{n_T} K|x_i - x_{i-1}| = K(b - a),$$

т.е. $\sup\limits_T V \le K(b - a)$ и функция имеет ограниченную вариацию.

Пример 4. Дифференцируемые функции, имеющие на отрезке $[a; b]$ ограниченную производную $|f'(x)| \leq K$. Действительно, по теореме Лагранжа конечных приращений (см. § 4.6) $f(x'') - f(x') = f'(\xi)(x'' - x')$, $\xi \in (x', x'')$ сразу получаем выполнение условия Липшица. В частности всякая функция класса $C^1[a; b]$ имеет ограниченную вариацию. В качестве иллюстрации к этому примеру рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{\pi}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Так как

$$\varphi'(0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta x^2 \sin \frac{\pi}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \Delta x \sin \frac{\pi}{\Delta x} = 0,$$

то

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{\pi}{x} - \pi \cos \dfrac{\pi}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Производная $\varphi'(x)$ имеет в нуле разрыв 2-го рода и ограничена на любом симметричном отрезке $[-A; A]$, поэтому функция $\varphi(x)$ имеет ограниченную вариацию на любом таком отрезке.

Пример 5. Приведем пример ограниченной функции, не имеющей ограниченной вариации. Рассмотрим на отрезке $[-1; 1]$ функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} x \cos \dfrac{\pi}{2x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Для разбиения

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{2n-2} < \ldots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$$

составим сумму V. Поскольку

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \begin{cases} 0, & k \text{ — нечетно;} \\ \pm\frac{1}{k}, & k \text{ — четно,} \end{cases}$$

то

$$\left|f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{2},$$

$$\left|f\left(\frac{1}{3}\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)\right| = \left|f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{5}\right)\right| = \left|f\left(\frac{1}{4}\right)\right| = \frac{1}{4},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\left|f\left(\frac{1}{2n-1}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| = \left|f\left(\frac{1}{2n}\right) - f(0)\right| =$$

$$= \left|f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| = \frac{1}{2n},$$

т. е.

$$V = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

но $V \to +\infty$, поэтому рассматриваемая функция не имеет ограниченной вариации.

6.2. Определение интеграла Стилтьеса и его свойства

Пусть на отрезке $[a; b]$ заданы две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$. Осуществим разбиение T отрезка $[a; b]$ точками x_i

$$T: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_{n_T} = b,$$

мелкость которого будем обозначать δ_T (см. § 5.3). Выберем в каждом отрезке разбиения точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и составим сумму

$$\sigma(f, \varphi, T, \xi) = \sum_{i=1}^{n_T} f(\xi_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})),$$

называемую интегральной *суммой Стилтъеса – Римана.*

Определение. Если существует предел $\sigma(f, \varphi, T, \xi)$ при $\delta_T \to 0$, не зависящий от T и выбора точек ξ_i, то этот предел называется *интегралом Стилтъеса функции* $f(x)$ *по функции* $\varphi(x)$ и обозначается

$$\lim_{\delta_T \to 0} \sigma(f, \varphi, T, \xi) = \int_a^b f(x)\, d\varphi(x).$$

Замечание. Обычный интеграл Римана может рассматриваться как частный случай интеграла Стилтьеса, когда в качестве $\varphi(x) = x$.

Отметим ряд свойств интеграла Стилтьеса.

Свойство 1. Если функция $f(x)$ интегрируема по функции $\varphi(x)$, то $\forall k, l \in R$ функция $kf(x)$ интегрируема по функции $l\varphi(x)$, причем

$$\int_a^b kf(x)\, d(l\varphi(x)) = kl \int_a^b f(x)\, d\varphi(x).$$

Свойство 2. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы по одной и той же функции $\varphi(x)$, то их сумма $f_1(x) + f_2(x)$ также интегрируема по функции $\varphi(x)$, причем

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\, d\varphi(x) = \int_a^b f_1(x)\, d\varphi(x) + \int_a^b f_2(x)\, d\varphi(x).$$

Свойство 3. Если функция $f(x)$ интегрируема по каждой из функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, то она интегрируема по их сумме, причем

$$\int_a^b f(x)\, d[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] = \int_a^b f(x)\, d\varphi_1(x) + \int_a^b f(x)\, d\varphi_2(x).$$

Доказываются эти три свойства, исходя непосредственно из определения.

Пример 1. Вычислить интеграл Стилтьеса $\int\limits_0^2 x^2\,d\varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 2; \\ 5, & x = 2. \end{cases}$$

Осуществим разбиение отрезка $[0;2]$ на части и составим интегральную сумму Стилтьеса–Римана для функции $f(x) = x^2$ по функции $\varphi(x)$:

$$\sigma(f,\varphi,T,\xi) = \sum_{i=1}^{n_T} \xi_i^2(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) =$$

$$= \xi_{n_T}^2(\varphi(2) - \varphi(x_{n_T-1})) = \xi_{n_T}^2\varphi(2) = 5\xi_{n_T}^2.$$

Но $x_{n_T-1} < \xi_{n_T} < x_{n_T} = 2$ и при $\delta_T \to 0$ $\xi_{n_T} \to 2$, поэтому $\lim\limits_{\delta_T\to 0} \sigma(f,\varphi,T,\xi) = 5\cdot 2^2 = 20$, т. е.

$$\int\limits_0^2 x^2\,d\varphi(x) = 20.$$

Пример 2. Вычислить интеграл Стилтьеса $\int\limits_0^3 x^2\,d\varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 2; \\ 3, & 2 < x \le 3. \end{cases}$$

Осуществим разбиение отрезка $[0;3]$ точками x_i

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{r-1} \le 2 < x_r <$$

$$< \ldots < x_{n-1} < x_{n_T} = 3,$$

тогда

$$\sigma(f,\varphi,T,\xi) = \sum_{i=1}^{n_T} \xi_i^2(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) =$$

$$= \xi_r^2(\varphi(x_r) - \varphi(x_{r-1})) = \xi_r^2(3 - 0) = 3\xi_r^2.$$

Так как при $\delta_T \to 0$ $\xi_r \to 2$, то

$$\int\limits_0^3 x^2\, d\varphi(x) = \lim_{\delta_T \to 0} \sigma(f, \varphi, T, \xi) = 3 \cdot 4 = 12.$$

Свойство 4. Если функция $f(x)$ интегрируема по функции $\varphi(x)$, $|f(x)| \le M$ $\forall x \in [a; b]$, V_a^b — полная вариация функции $\varphi(x)$, то

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\, d\varphi(x) \right| \le M \cdot V_a^b.$$

Свойство 5 (*интегрирование по частям*). Если функция $f(x)$ интегрируема по функции $\varphi(x)$, то и обратно функция $\varphi(x)$ интегрируема по функции $f(x)$, причем имеет место тождество

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\, df(x) = f(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f(x)\, d\varphi(x),$$

называемое *формулой интегрирования по частям.*

Доказательство. Осуществим разбиение отрезка $[a; b]$ точками x_i, выберем точки ξ_i, составим интегральную сумму Стилтьеса–Римана для левого интеграла

$$\sigma(\varphi, f, T, \xi) = \sum_{i=1}^{n_T} \varphi(\xi_i)(f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

и сделаем в ней перегруппировку слагаемых относительно значений функции $f(x)$ в узлах x_i, получим

$$\sigma(\varphi, f, T, \xi) = \varphi(\xi_{n_T})f(b) - \varphi(\xi_1)f(a) -$$
$$- \sum_{i=1}^{n_T - 1} f(x_i)(\varphi(\xi_{i+1}) - \varphi(\xi_i)) =$$

$$= \varphi(\xi_{n_T})f(b) - \varphi(\xi_1)f(a) + (f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)) -$$

$$- (f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)) - \sum_{i=1}^{n_T-1} f(x_i)(\varphi(\xi_{i+1}) - \varphi(\xi_i)) =$$

$$= f(x)\varphi(x)\Big|_a^b - f(a)(\varphi(\xi_1) - \varphi(a)) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n_T-1} f(x_i)(\varphi(\xi_{i+1}) - \varphi(\xi_i)) - f(b)(\varphi(b) - \varphi(\xi_{n_T})) =$$

$$= f(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \sum_{i=0}^{n_T} f(x_i)(\varphi(\xi_{i+1}) - \varphi(\xi_i)) =$$

$$= f(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \sigma(f, \varphi, T, \xi).$$

Так как существует предел

$$\lim_{\delta_T \to 0} \sigma(f, \varphi, T, \xi) = \int_a^b f(x)\, d\varphi(x),$$

то существует предел и левой части и по определению интеграла Стилтьеса – Римана он равен $\int_a^b \varphi(x)\, df(x)$, что завершает доказательство формулы интегрирования по частям. **Теорема доказана.**

Свойство 6 (*аддитивность*). Если функция $f(x)$ интегрируема по функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a; b]$ и этот отрезок разделен точкой c на два других ($a < c < b$), то на каждой из частей $[a; c]$ и $[c; b]$ функция $f(x)$ интегрируема по функции $\varphi(x)$, причем

$$\int_a^b f(x)\, d\varphi(x) = \int_a^c f(x)\, d\varphi(x) + \int_c^b f(x)\, d\varphi(x).$$

Обратное утверждение, как показывает следующий пример, вообще говоря, не верно, т. е. из существования правой части последнего равенства *не вытекает* существование левой.

Пример 3. Пусть на $[-1;1]$ задана пара функций

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x < 0; \\ 0, & 0 \le x \le 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0; \\ 1, & 0 < x \le 1, \end{cases}$$

тогда

$$\int\limits_{-1}^{0} f(x)\, d\varphi(x) = 0$$

(так как все разности $\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i) = 0$),

$$\int\limits_{0}^{1} f(x)\, d\varphi(x) = 0 \quad (\text{так как все } f(\xi_i) = 0).$$

Однако интеграл $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, d\varphi(x)$ не существует. Действительно, пусть T — разбиение $[-1;1]$ точками x_i:

$$T: \quad -1 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_r < 0 <$$

$$< x_{r+1} < \ldots < x_{n_T - 1} < x_{n_T} = 1,$$

тогда

$$\sigma(f, \varphi, T, \xi) = \sum_{i=1}^{n_T} f(\xi_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) =$$

$$= f(\xi_r)(\varphi(x_{r+1}) - \varphi(x_r)) = f(\xi_r)(1 - 0) = f(\xi_r).$$

Если $0 \le \xi_r < x_{r+1}$, то при $\delta_T \to 0$ $\xi_r \to 0+$, тогда $f(\xi_r) = 0$ и, значит, $\lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma(f, \varphi, T, \xi) = 0$. Если $x_r < \xi_r < 0$, то при $\delta_T \to 0$ $\xi_r \to 0-$, тогда $f(\xi_r) = 1$ и, значит,

$\lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma(f, \varphi, T, \xi) = 1$, т. е. $\sigma(f, \varphi, T, \xi)$ не имеет конечного предела и интеграл $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\, d\varphi(x)$ не существует.

Полученный «неприятный» результат очевидно связан с тем, что обе функции разрывны в одной точке 0.

Справедливо следующее свойство.

Свойство 6a. Если существуют интегралы $\int\limits_a^c f(x)\, d\varphi(x)$ и $\int\limits_c^b f(x)\, d\varphi(x)$, то для существования интеграла $\int\limits_a^b f(x)\, d\varphi(x)$ достаточно, чтобы одна из функций $f(x)$ или $\varphi(x)$ была *непрерывна* в точке $x = c$, а другая *ограничена* в некоторой окрестности этой точки.

Доказательство. Рассмотрим два случая. Первый предполагает, что точка c входит в разбиение T, тогда $\sigma(f, \varphi, T, \xi)$ представляет собой сумму аналогичных сумм для отрезков $[a; c]$ и $[c; b]$ и будет стремиться при $\delta_T \to 0$ к сумме интегралов

$$\int\limits_a^c f(x)\, d\varphi(x) + \int\limits_c^b f(x)\, d\varphi(x).$$

Пусть точка c не входит в разбиение T и σ — некоторая сумма, соответствующая этому разбиению. Рассмотрим новое разбиение $T^* = T \cup \{c\}$ и сумму σ^*, которая, как отмечалось выше в первом случае, имеет своим пределом при $\delta_T \to 0$ сумму интегралов. Если $x_{r-1} < c < x_r$, то суммы σ и σ^* отличаются друг от друга слагаемыми

$$f(\xi_r)(\varphi(x_r) - \varphi(x_{r-1}))$$

в сумме σ и

$$f(\eta_r)(\varphi(c) - \varphi(x_{r-1})) + f(\eta_{r+1})(\varphi(x_r) - \varphi(c))$$

в сумме σ^*, причем $x_{r-1} \le \eta_r \le c \le \eta_{r+1} \le x_r$, $x_{r-1} \le \xi_r \le$

$\leq x_r$, так что

$$\sigma - \sigma^* = f(\xi_r)(\varphi(x_r) - \varphi(x_{r-1})) - f(\eta_r)(\varphi(c) - \varphi(x_{r-1})) -$$
$$-f(\eta_{r+1})(\varphi(x_r) - \varphi(c)).$$

Если $\varphi(x)$ непрерывна в точке c, то при $\delta_T \to 0$

$$|\sigma - \sigma^*| \leq |f(\xi_r)||\varphi(x_r) - \varphi(x_{r-1})| +$$
$$+|f(\eta_r)||\varphi(c) - \varphi(x_{r-1})| + |f(\eta_{r+1})||\varphi(x_r) - \varphi(c)| \to 0$$

за счет вторых множителей в каждом из слагаемых.

Если $f(x)$ непрерывна в точке c, то после перегруппировки слагаемых относительно значений функции $\varphi(x)$ в узлах при $\delta_T \to 0$

$$|\sigma - \sigma^*| \leq |\varphi(x_r)||f(\xi_r) - f(\eta_{r+1})| +$$
$$+|\varphi(x_{r-1})||f(\eta_r) - f(\xi_r)| + |\varphi(c)||f(\eta_{r+1}) - f(\eta_r)| \to 0.$$

Поэтому

$$\lim_{\delta_T \to 0} \sigma = \lim_{\delta_T \to 0} \sigma^* = \int\limits_a^c f(x)\, d\varphi(x) + \int\limits_c^b f(x)\, d\varphi(x).$$

Свойство 6а доказано.

6.3. Существование и вычисление интеграла Стилтьеса

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены на $[a; b]$ и $\varphi(x)$ возрастает. Осуществим разбиение отрезка $[a; b]$ точками x_i, обозначим $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$ и $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$ и составим верхнюю и нижнюю интегральные суммы Дарбу – Стилтьеса

$$s = \sum_{i=1}^{n_T} m_i(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) \text{ и } S = \sum_{i=1}^{n_T} M_i(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})).$$

Как и для интеграла Римана эти суммы обладают следующими свойствами (см. § 5.4).

Свойство 1. Для любой интегральной суммы Римана – Стилтьеса, соответствующей разбиению T, справедливо неравенство $s \le \sigma(f, \varphi, T, \xi) \le S$.

Свойство 2. Если к точкам разбиения T добавить новые точки разбиения, то верхняя сумма S может лишь не увеличиться, а нижняя s лишь не уменьшиться.

Свойство 3. Любая нижняя интегральная сумма Дарбу – Стилтьеса не превосходит любой верхней интегральной суммы Дарбу – Стилтьеса.

Таким образом, множество всех верхних сумм Дарбу – Стилтьеса $\{S\}$ ограничено снизу, а множество всех нижних сумм $\{s\}$ ограничено сверху. Обозначим $l = \sup s$, $L = \inf S$, тогда $l \le L$.

Теорема (необходимое и достаточное условие интегрируемости). *Для существования интеграла Стилтьеса* $\int\limits_a^b f(x)\, d\varphi(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{\delta_T \to 0} (S - s) = 0$ (*или* $l = L$).

Для доказательства следует продублировать все рассуждения доказательства соответствующей теоремы (критерий Римана) из § 5.4 текущей главы.

Теорема 1. *Если* $f(x) \in C[a; b]$, *то* $f(x)$ *интегрируема на* $[a; b]$ *по любой возрастающей функции* $\varphi(x)$.

В справедливости этого утверждения можно убедиться, продублировав все рассуждения доказательства теоремы об интегрируемости по Риману непрерывной на отрезке функции (см. теорему 1 из § 5.5).

Теорема 2. *Если* $f(x) \in C[a; b]$, *то* $f(x)$ *интегрируема на* $[a; b]$ *по любой функции ограниченной вариации.*

Действительно, всякая функция ограниченной вариации представима в виде разности двух неубывающих функций, по которым в силу теоремы 1 интеграл от $f(x)$ по $[a;b]$ существует, тогда в силу свойства линейности интеграла Римана–Стилтьеса по $\varphi(x)$ получаем требуемое утверждение.

По формуле интегрирования по частям получаем следствие из этой теоремы.

Следствие. *Любая функция ограниченной вариации $\varphi(x)$ интегрируема по функции $f(x) \in C[a;b]$, непрерывной на $[a;b]$.*

Теорема 3. *Если $f(x) \in C[a;b]$, $\varphi(x)$ имеет ограниченную интегрируемую производную на $[a;b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Доказательство. Отметим, что римановский интеграл в правой части доказываемого равенства существует в силу свойства 5 определенного интеграла (см. § 5.6), а интеграл Стилтьеса из левой части существует по теореме 2, поскольку $\varphi(x)$ является функцией ограниченной вариации (см. пример 4 из § 5.15). Осуществим разбиение T отрезка $[a;b]$ точками x_i, тогда по теореме Лагранжа о среднем для $\varphi(x)$ на любом частичном отрезке разбиения справедливо равенство

$$\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) = \varphi'(\tilde{\eta}_i)(x_i - x_{i-1}), \quad x_{i-1} < \tilde{\eta}_i < x_i.$$

Составим суммы

$$\sigma(f, \varphi, T, \tilde{\eta}) = \sum_{i=1}^{n_T} f(\tilde{\eta}_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_T} f(\tilde{\eta}_i) \cdot \varphi'(\tilde{\eta}_i)(x_i - x_{i-1}) = S(f \cdot \varphi', T, \tilde{\eta}),$$

тогда при $\delta_T \to 0$ в силу существования обоих интегралов получаем в пределе интересующее нас равенство. **Теорема 3 доказана.**

Замечание. Теорема остается справедливой и в случае, если на отрезке $[a;b]$ имеется конечное число точек, где производная $\varphi'(x)$ не существует, но $\varphi(x) \in C[a;b]$ (в этих условиях $\varphi(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a;b]$). При доказательстве необходимо включить точки несуществования производной $\varphi'(x)$ в число точек деления отрезка $[a;b]$.

Пример 1.

$$\int_2^4 x^2 d\ln x = \int_2^4 x^2 \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\bigg|_2^4 = 6,$$

$$\int_0^2 x^2 d(3x^2-2) = \int_0^2 x^2 6x\,dx = \frac{3}{2}x^4\bigg|_0^2 = 24,$$

$$\int_0^\pi \sin^3 x\, d(\sin x) = 0.$$

Следствие 1. *Если $f(x) \in C[a;b]$, $\varphi(b) \neq \varphi(b-0)$, во всех остальных точках отрезка $[a;b]$ производная $\varphi'(x)$ существует, интегрируема (и значит ограничена), тогда*

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx + f(b)\cdot(\varphi(b)-\varphi(b-0)).$$

Доказательство. Интеграл из левой части равенства существует по теореме 2 (как интеграл от непрерывной функции по функции ограниченной вариации). Введем функцию

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \neq b; \\ \varphi(b-0), & x = b, \end{cases}$$

тогда $\varphi^*(x) \in C[a;b]$ и по теореме 3

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi^*(x) = \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx.$$

Осуществим разбиение T отрезка $[a;b]$ и составим интегральную сумму

$$\sigma(f,\varphi,T,\xi) = \sum_{i=1}^{n_T} f(\xi_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_T-1} f(\xi_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) + f(\xi_{n_T})(\varphi(b) - \varphi(b-0)+$$

$$+\varphi(b-0) - \varphi(x_{n_T-1})) = \sum_{i=1}^{n_T-1} f(\xi_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}))+$$

$$+f(\xi_{n_T})(\varphi(b-0) - \varphi(x_{n_T-1})) + f(\xi_{n_T})(\varphi(b) - \varphi(b-0)) =$$
$$= \sigma(f,\varphi^*,T,\xi) + f(\xi_{n_T})(\varphi(b) - \varphi(b-0)).$$

Но при $\delta_T \to 0$

$$\sigma(f,\varphi^*,T,\xi) \;\to\; \int_a^b f(x)\,d\varphi^*(x);$$

$$f(\xi_{n_T}) \cdot (\varphi(b) - \varphi(b-0)) \;\to\; f(b) \cdot (\varphi(b) - \varphi(b-0)),$$

поэтому существует предел $\sigma(f,\varphi,T,\xi)$ при $\delta_T \to 0$ и справедлива доказываемая формула. **Следствие 1 доказано.**

Следствие 2. *Если $f(x) \in C[a;b]$, $\varphi(a) \neq \varphi(a+0)$, во всех остальных точках отрезка $[a;b]$ производная $\varphi'(x)$ существует, интегрируема (и значит ограничена), тогда*

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx + f(a) \cdot (\varphi(a+0) - \varphi(a)).$$

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

Следствие 3. *Если* $f(x) \in C[a;b]$, $\varphi(c-0) \neq \varphi(c+0)$, $a < c < b$, *во всех остальных точках отрезка* $[a;b]$ *производная* $\varphi'(x)$ *существует, интегрируема (и значит ограничена), тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \left(\int\limits_a^c + \int\limits_c^b\right) f(x)\varphi'(x)\,dx +$$

$$+ f(c)\cdot(\varphi(c+0) - \varphi(c-0)).$$

Доказательство. Действительно,

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \left(\int\limits_a^c + \int\limits_c^b\right) f(x)\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_a^c f(x)\varphi'(x)\,dx + f(c)\cdot(\varphi(c) - \varphi(c-0)) +$$

$$+ \int\limits_c^b f(x)\varphi'(x)\,dx + f(c)\cdot(\varphi(c+0) - \varphi(c)) =$$

$$= \left(\int\limits_a^c + \int\limits_c^b\right) f(x)\varphi'(x)\,dx + f(c)\cdot(\varphi(c+0) - \varphi(c-0)).$$

Следствие 3 доказано.

Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Если* $f(x) \in C[a;b]$, $\varphi(x)$ *имеет разрывы первого рода в точках* a, b *и конечном числе внутренних* *точек $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_k < b$, а между этими точками производная $\varphi'(x)$ существует, интегрируема (и значит ограничена), то справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx + f(a)\cdot(\varphi(a+0)-\varphi(a)) +$$

$$+\sum_{i=1}^{k} f(c_i)\cdot(\varphi(c_i+0)-\varphi(c_i-0)) + f(b)\cdot(\varphi(b)-\varphi(b-0)).$$

Итак, наличие точек разрыва 1-го рода у функции $\varphi(x)$ хотя и создает «технические» трудности, все же не мешает вычислять интеграл, если только $\varphi(x)$ дифференцируема в остальных точках отрезка $[a; b]$.

Пример 2. Вычислить интеграл Стилтьеса

$$\int_1^6 x^2\,d\varphi(x), \quad \text{где} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 2, & x = 1 \text{ или } x = 6; \\ x, & 1 < x \le 3; \\ x^2, & 3 < x \le 5; \\ x^3, & 5 < x < 6. \end{cases}$$

Здесь точки разрыва 1, 3, 5 и 6, поэтому последовательно находим

$$\varphi(1+0) - \varphi(1) = 1 - 2 = -1,$$

$$\varphi(3+0) - \varphi(3-0) = 3^2 - 3 = 6,$$

$$\varphi(5+0) - \varphi(5-0) = 5^3 - 5^2 = 125 - 25 = 100,$$

$$\varphi(6) - \varphi(6-0) = 2 - 6^3 = -214,$$

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 1, & 1 < x \le 3; \\ 2x, & 3 < x \le 5; \\ 3x^2, & 5 < x < 6. \end{cases}$$

Отсюда по теореме 4 получаем

$$\int_1^6 x^2\,d\varphi(x) = \int_1^3 x^2\cdot 1\,dx + \int_3^5 x^2\cdot 2x\,dx + \int_5^6 x^2\cdot 3x^2\,dx +$$

$$+1^2\cdot(-1)+3^2\cdot 6+5^2\cdot 100+6^2\cdot(-214)=$$

$$=\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3+\left.\frac{x^4}{2}\right|_3^5+\left.\frac{3}{5}x^5\right|_5^6-1+54+2.500-7.704=$$

$$=\left(9-\frac{1}{3}\right)+\frac{625-81}{2}+\frac{3}{5}\cdot(6^5-5^5)-5.151=$$

$$=9-\frac{1}{3}+272+\frac{3}{5}\cdot(7.776-3.125)-5.151=$$

$$=-4.870-\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot 4.651=-4.870-\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot 4.650+\frac{3}{5}=$$

$$=-4.870-\frac{1}{3}+2.790+\frac{3}{5}=-2.080+\frac{3}{5}-\frac{1}{3}=$$

$$=-2.080+\frac{4}{15}=-2.079\frac{11}{15}.$$

Пример 3. Проверьте, что

$$\int\limits_0^3 x^2\,d\varphi(x)=494\frac{8}{15},\quad \text{если}\quad \varphi(x)=\begin{cases} x^3, & 0\le x\le 2;\\ x^4, & 2<x\le 3.\end{cases}$$

Пример 4. Убедитесь, что

$$\int\limits_1^6 x\,d\varphi(x)=148,\quad \text{если}\quad \varphi(x)=\begin{cases} x, & 1\le x\le 3;\\ x^2, & 3<x\le 6.\end{cases}$$

Вычислите по формуле теоремы 4 интегралы из примеров 1 и 2 из § 6.2.

7. Элементы общей топологии и функционального анализа

7.1. Определения и основные свойства пространств

Термин «пространство» по существу эквивалентен термину «множество». Отличие состоит лишь в том, что существительное «пространство» крайне редко употребляется без связки с каким-нибудь прилагательным. Соответствующие типы пространств играют весьма важную роль как в математике вообще, так и в математическом анализе в частности. Приведем здесь основные типы пространств.

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО. Пусть X — некоторое множество, Σ — множество некоторых подмножеств множества X (система подмножеств).

Определение. Система подмножеств Σ называется *топологией* на множестве X, если Σ обладает свойствами:

1. $X \in \Sigma$, $\emptyset \in \Sigma$;
2. а) если $A, B \in \Sigma$, то $A \cap B \in \Sigma$;

   б) объединение любого числа элементов из Σ принадлежит Σ.

Упорядоченная пара (X, Σ) называется *топологическим пространством.* Каждый элемент $\sigma \in \Sigma$ называется *открытым множеством.* Соответственно множество $A \subset X$ называется *замкнутым множеством* (в топологии Σ), если его дополнение $X \setminus A \subset \Sigma$ — открытое множество.
Если $x \in X$ — некоторая точка, то любой элемент $\sigma \in \Sigma$, содержащий x, называется *окрестностью точки* x.

ХАУСДОРФОВО ПРОСТРАНСТВО. Топологическое пространство (X, Σ) называется *хаусдорфовым*, если для любых двух элементов $x, y \in X$ найдутся их окрестности $\sigma_x, \sigma_y \in \Sigma$ такие, что $\sigma_x \cap \sigma_y = \emptyset$.

Пример 1. Пусть $X \equiv R$, тогда в качестве топологии на этом множестве можно выбрать систему Σ всевозможных подмножеств множества R, состоящих из конечного или счетного числа непересекающихся интервалов.

Метрическое пространство. Множество X называется *метрическим пространством*, если на X задана неотрицательная числовая функция двух переменных $\rho(x, y)$, удовлетворяющая условиям:

1. (*Аксиома тождества*) $\rho(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$, причем $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. (*Аксиома симметрии*) $\rho(x,y) = \rho(y,x) \quad \forall x, y \in X$;
3. (*Аксиома треугольников*) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ $\forall x, y, z \in X$.

Функцию $\rho(x, y)$ называют *метрикой* (или *расстоянием*). Таким образом, метрическое пространство — это упорядоченная пара $(X, \rho(x,y))$, при этом множество X называют *носителем* метрического пространства.

Пример 2. Пусть $X \equiv R$, $\rho(x,y) = |x - y|$, тогда пара $(R,\ \rho(x,y))$ является метрическим пространством.

Пример 3. Пусть $X \equiv R^3$, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$, тогда функции

$$\rho_1(\bar{x},\bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2},$$

$$\rho_2(\bar{x},\bar{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|\},$$

$$\rho_3(\bar{x},\bar{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|$$

являются метриками на $X \equiv R^3$, т. е. упорядоченные пары (R^3, ρ_1), (R^3, ρ_2), (R^3, ρ_3) являются метрическими пространствами.

Если $x \in X$, тогда $\forall \epsilon > 0$ множество $\sigma_x(\epsilon) = \{y : y \in X,\ \rho(x,y) < \epsilon\}$ называется *открытой ϵ-окрестностью* точки x в метрическом пространстве (X, ρ). Множество

σ, являющееся объединением любой совокупности открытых ϵ-окрестностей различных точек $x \in X$, называется *открытым.* Система таких множеств $\Sigma \equiv \{\sigma\}$ задает на X топологию, тем самым наделяя метрическое пространство структурой топологического хаудорфова пространства. Такую топологию называют *топологией, порожденной* (*индуцированной*) *метрикой* ρ, или *естественной топологией.*

Определение. Последовательность элементов $\{x_n\}$ метрического пространства (X, ρ) называется *фундаментальной последовательностью* или *последовательностью Коши*, если она удовлетворяет *условию Коши*, т. е. $\forall\epsilon > 0$ найдется номер N_ϵ такой, что для любых $n, m > N_\epsilon$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$.

Соответственно последовательность элементов $\{x_n\}$ метрического пространства (X, ρ) называется *сходящейся* к элементу $a \in X$, если сходится к нулю числовая последовательность $\rho(x_n, a) \to 0$ при $n \to \infty$. Записывают это как обычно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Как и в случае числовых последовательностей доказывается, что из сходимости следует фундаментальность, единственность предела, теорема о пределе подпоследовательности.

Метрическое пространство (X, ρ) называется *полным*, если в этом пространстве всякая последовательность Коши сходится к элементу из X, в противном случае — *неполным.*

Линейное пространство. Множество X называется *линейным пространством* над полем вещественных чисел R, если выполнены условия:

1. Для любых двух элементов $x, y \in X$ найдется (единственный) элемент $z \in X$ такой, что $z = x + y$, называемый *суммой* элементов x и y, причем множество X является *абелевой группой по сложению*, т. е. операция сложения обладает свойствами:

а) (*свойство ассоциативности*) $x+(y+z) = (x+y)+z$ $\forall x, y, z \in X$;

б) (*свойство коммутативности*) $x + y = y + x$ $\forall x, y \in X$;

в) существует единственный элемент, называемый *нулем* и обозначаемый $0 \in X$, такой, что $x+0 = x$ $\forall x \in X$;

г) для любого элемента $x \in X$ найдется единственный *противоположный* ему элемент, обозначаемый $(-x) \in X$, такой, что $x + (-x) = 0$;

2. Для любого элемента $x \in X$ и любого вещественного числа $\alpha \in R$ найдется (единственный) элемент $z \in X$ такой, что $z = \alpha \cdot x$, называемый *произведением* элемента x и числа α, причем эта операция обладает свойствами:

   а) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x \;\; \forall x \in X, \;\; \forall \alpha, \beta \in R$;

   б) $1 \cdot x = x \;\; \forall x \in X$;

3. Операции сложения и умножения связаны свойствами дистрибутивности:

   а) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x \;\; \forall x \in X, \;\; \forall \alpha, \beta \in R$;

   б) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \;\; \forall x, y \in X, \;\; \forall \alpha \in R$.

Пример 4. Пространства R^3, $C[a, b]$ являются линейными.

Элементы линейных пространств еще называют *векторами*, а сами пространства векторными. Если в линейном пространстве задана топология, его называют *линейным топологическим*.

НОРМИРОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО. Линейное пространство X над полем вещественных чисел R называется *нормированным*, если на X задана числовая функция, обозначаемая $\|\cdot\|$ и обладающая свойствами:

1. (*Аксиома тождества*) для любого элемента $x \in X$ $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2. (*Аксиома однородности*) для любого элемента $x \in X$ и любого вещественного числа $\lambda \in R$ выполняется равенство $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

3. (*Аксиома треугольников*) для любых двух элементов $x, y \in X$ выполняется неравенство $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$.

Функцию $\|\cdot\|$ называют *нормой*.

Пример 5. На множестве $C[a,b]$ функции

$$\|x\|_1 = \max_{[a,b]} |x(t)|, \quad \|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p > 0,$$

являются нормами. На множестве $C^k[a,b]$ норму можно задать, например, следующим образом:

$$\|x\| = \max \left\{ \max_{[a,b]} |x(t)|, \ \max_{[a,b]} |x'(t)|, \ \ldots, \ \max_{[a,b]} |x^{(k)}(t)| \right\}.$$

Всякое нормированное пространство метризуемо, так как метрика на X определяется равенством

$$\rho(x,y) = \|x - y\|.$$

Такую метрику называют *порожденной* (*или индуцированной*) *нормой* $\|\cdot\|$. Относительно такой метрики нормированное пространство может оказаться как полным, так и неполным. В первом случае его называют *банаховым*.

Пример 6. Множество функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, обозначаемое $C[a,b]$, относительно равномерной (чебышевской) нормы $\|x\| = \max\limits_{[a,b]} |x(t)|$ является банаховым пространством, а относительно интегральной $\|x\|_2 = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$, $p > 0$, — неполным.

Евклидово пространство. Линейное пространство X над полем вещественных чисел R называется *евклидовым*, если на X задана билинейная числовая функция двух переменных, обозначаемая $(\cdot,\cdot)$ и обладающая свойствами:

1. (*Аксиома неотрицательности и тождества*) для любого элемента $x \in X$ $(x,x) \geq 0$, причем $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2. (*Аксиома симметрии*) для любых двух элементов $x, y \in X$ выполняется равенство $(x,y) = (y,x)$;

3. (*Аксиома однородности*) для любых двух элементов $x, y \in X$ и любого вещественного числа $\lambda \in R$ выполняется равенство
$$(\lambda x, y) = (x, \lambda y) = \lambda(x,y);$$

4. (*Аксиома билинейности*) для любых трех элементов $x, y, z \in X$ выполняются равенства
$$(x+y,z) = (x,z) + (y,z), \quad (x,y+z) = (x,y) + (x,z).$$

Функцию $(\cdot,\cdot)$ называют *скалярным произведением*. Скалярное произведение порождает (индуцирует) на евклидовом пространстве норму по формуле
$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

Справедливо неравенство Коши – Буняковского (доказательство смотреть во введении к главе 8)
$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| = \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)}.$$

Если евклидово пространство является банаховым относительно нормы, индуцированной скалярным произведением, то его называют *гильбертовым*.

Пример 7. Множество функций с интегрируемым квадратом на отрезке $[a,b]$ относительно скалярного произведения

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b x(t)\cdot y(t)dt$$

является гильбертовым пространством и обозначается $L_2[a,b]$.

7.2. Линейные операторы и функционалы. Непрерывность и ограниченность. Сопряженные пространства. Теорема Хана – Банаха

Операторы и функционалы. Пусть X и Y — множества произвольной природы. Если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие по определенному правилу A единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на X задан *оператор*, и пишут $A: x \to y$.

Если множества X и Y являются конечномерными пространствами (т. е. $X \equiv R^n$, $Y \equiv R^m$), тогда вместо термина «оператор» принято употреблять термин «функция». В этом случае соответствие $A: R^n \to R^m$ эквивалентно заданию m функций (координатных), зависящих от n переменных $y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, m$.

Если X — множество произвольной природы, $Y \equiv R\,(C)$, то вместо термина «оператор» принято употреблять термин «функционал» (вещественный или комплексный) и записывать это соответствие так $f: X \to R$, а действие функционала f на элемент $x \in X$ обозначают $\langle x, f\rangle$ или $f(x)$.

Оператор A (функционал f), заданный на линейном нормированном пространстве X, называется *линейным*, если для любых элементов $x, y \in X$ и любых вещественных чисел $\alpha, \beta \in R$ выполняется равенство

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \quad \big(\langle \alpha x + \beta y, f\rangle = \alpha\langle x, f\rangle + \beta\langle y, f\rangle\big).$$

Непрерывность и ограниченность. Пусть X и Y — нормированные пространства, $A : X \to Y$, $D(A) \subset X$. Наиболее важными для практических нужд являются следующие два случая: $D(A) \equiv X$ и $\overline{D(A)} \equiv X$, т. е. оператор A плотно определен на X.

Оператор A называется *непрерывным* в точке x_0, если при $x \to x_0$ в X (т. е. $\|x - x_0\|_X \to 0$) $Ax \to Ax_0$ в Y (т. е. $\|Ax - Ax_0\|_Y \to 0$).

Замечание 1. Для линейного оператора A достаточно потребовать непрерывности в нуле пространства X, чтобы он был непрерывен во всех остальных точках пространства X (если $D(A) \equiv X$.) Действительно, если при $x \to 0$ в X $Ax \to 0$ в Y, то при $x \to x_0$ разность $x - x_0 \to 0$ в X, а значит $A(x - x_0) \to 0$ в Y и в силу линейности оператора $Ax - Ax_0 \to 0$ или $Ax \to Ax_0$.

Линейный оператор A с $D(A) \equiv X$ называется *ограниченным*, если ограничено числовое множество

$$\{\|Ax\|_Y : \|x\|_X \le 1\}.$$

В этом случае число $\sup\{\|Ax\|_Y : \|x\|_X \le 1\}$ называется *нормой оператора* A и обозначается

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y \equiv \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Справедлива

Теорема. *Пусть $A : X \to Y$ — линейный оператор, $D(A) \equiv X$, X и Y — нормированные пространства. Для того чтобы оператор A был непрерывным на X, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть оператор A непрерывен, но неограничен, тогда числовое множество $\{\|Ax\|_Y : \|x\|_X \le 1\}$ неограничено, т. е. для любого натурального $n \in N$ найдется элемент $x_n \in X$ такой, что

$\|x_n\|_X \leq 1$, но $\|Ax_n\|_Y \geq n$. Рассмотрим последовательность элементов $x'_n = \dfrac{x_n}{n}$, тогда $\|x'_n\|_X = \dfrac{\|x_n\|_X}{n} \leq \dfrac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $x'_n \to 0$, поэтому в силу непрерывности оператора $Ax'_n \to 0$ при $n \to \infty$ или $\|Ax'_n\|_Y \to 0$. Однако

$$\|Ax'_n\|_Y = \left\|A\frac{x_n}{n}\right\|_Y = \frac{\|Ax_n\|_Y}{n} \geq \frac{n}{n} = 1.$$

Полученное противоречие означает ограниченность оператора A.

Достаточность. Пусть A — ограниченный оператор, тогда для любого $x \neq 0$ положим $x' = \dfrac{x}{\|x\|_X}$, очевидно

$$\|x'\|_X = \left\|\frac{x}{\|x\|_X}\right\|_X = \frac{\|x\|_X}{\|x\|_X} = 1,$$

поэтому в силу ограниченности оператора A

$$\|Ax'\|_Y \leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y = \|A\|$$

или

$$\|Ax'\|_Y = \left\|A\frac{x}{\|x\|_X}\right\|_Y = \frac{1}{\|x\|_X}\|Ax\|_Y \leq \|A\|;$$

$$\|Ax\|_Y \leq \|A\| \cdot \|x\|_X.$$

Отсюда следует, что если $x \to 0$ в X, то $\|x\|_X \to 0$ и $\|Ax\|_Y \to 0$, т. е. оператор A непрерывен в нуле и в соответствии с замечанием 1 непрерывен на X. **Теорема доказана.**

Замечание 2. Множество линейных ограниченных операторов из X в Y обозначают $\mathcal{L}(X, Y)$. Это нормированное пространство с операторной нормой. Если Y — банахово пространство, то $\mathcal{L}(X, Y)$ — банахово пространство относительно операторной нормы.

Сопряженные пространства. Теорема Хана–Банаха. Вещественный функционал $f : D \to R$ называется *ограниченным*, если ограничено числовое множество

$$\{\langle x, f\rangle \mid x \in D, \ \ \|x\|_X \leq 1\},$$

соответственно число

$$\sup\{\langle x, f\rangle \mid x \in D, \ \ \|x\|_X \leq 1\}$$

называется *нормой* функционала f и обозначается $\|f\|$,

$$\|f\| = \sup_{x\in D,\, \|x\|_X\leq 1} |\langle x, f\rangle| = \sup_{x\in D,\, x\neq 0} \frac{|\langle x, f\rangle|}{\|x\|_X}.$$

Теорема Хана – Банаха. *Пусть на линейном нормированном пространстве X задан линейный ограниченный функционал f с областью определения $D(f) \subset X$, тогда существует всюду определенный на X линейный ограниченный функционал $\tilde{f}$ такой, что $\|\tilde{f}\| = \|f\|$ и для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $\langle x, \tilde{f}\rangle = \langle x, f\rangle$.*

Пусть X — банахово пространство, тогда множество $\mathcal{L}(X, R)$ линейных ограниченных функционалов, заданных на X, называется *сопряженным пространством* к X и обозначается X^*. Сопряженное пространство X^* является банаховым относительно функциональной нормы.

Замечание 3. Можно ввести второе сопряженное к X пространство $X^{**} \overset{\text{def}}{\equiv} (X^*)^*$, третье $X^{***} \overset{\text{def}}{\equiv} (X^{**})^*$ и т. д. Если X — гильбертово пространство, то $X \equiv X^*$. В общем случае $X \neq X^*$, однако $X \subset X^{**}$. Если же $X = X^{**}$, то пространство X называется *рефлексивным*. Для нерефлексивных пространств все пространства X, X^*, $(X^*)^*$, $((X^*)^*)^*, \ldots$ различны. Пространство $C[a, b]$ нерефлексивно, а пространство $L_p[a, b]$ — рефлексивно.

7.3. Теоремы об общем виде линейных функционалов в некоторых функциональных пространствах

Общий вид функционалов в $C[a,b]$. Теорема Рисса.

Теорема Ф. Рисса. *Всякий линейный непрерывный функционал f, заданный на пространстве $C[a,b]$, выражается с помощью интеграла Римана – Стилтьеса по формуле*

$$\langle y(x), f\rangle = \int_a^b y(x)\, d\varphi(x) \quad \forall y(x) \in C[a,b],$$

где $\varphi(x)$ — функция ограниченной вариации на $[a,b]$, определяемая по функционалу f, причем $\|f\| = V_a^b \varphi(x)$.

Доказательство. Поскольку всякая функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, ограничена на этом отрезке (см. § 3.7, теорема Вейерштрасса), то будем рассматривать пространство $C[a,b]$ как подпространство пространства ограниченных на $[a,b]$ функций, которое принято обозначать $M[a,b]$, с нормой

$$\|y(x)\| = \sup_{[a,b]} |y(x)| \quad \forall y(x) \in M[a,b].$$

По теореме Хана – Банаха функционал f допускает продолжение с пространства $C[a,b]$ на пространство $M[a,b]$ с сохранением нормы. Обозначим продолженный функционал через $\tilde{f}$.

Рассмотрим семейство функций

$$u_\tau(x) = \begin{cases} 1, & a \le x < \tau; \\ 0, & \tau \le x \le b. \end{cases}$$

Очевидно $u_\tau(x) \in M[a,b]$, $\|u_\tau(x)\| = 1$.

Пусть $\varphi(\tau) = \left\langle u_\tau(x), \tilde{f} \right\rangle$, покажем, что $\varphi(\tau)$ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$ (см. § 6.1). Осуществим (произвольное) разбиение отрезка $[a, b]$

$$T: \quad a = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{n_T - 1} < \tau_{n_T} = b,$$

построим сумму

$$V_T = \sum_{i=1}^{n_T} |\varphi(\tau_i) - \varphi(\tau_{i-1})|$$

и введем обозначения

$$\epsilon_i = \operatorname{sign}\left(\varphi(\tau_i) - \varphi(\tau_{i-1})\right).$$

Тогда

$$V_T = \sum_{i=1}^{n_T} (\varphi(\tau_i) - \varphi(\tau_{i-1})) \cdot \epsilon_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_T} \epsilon_i \cdot \left(\left\langle u_{\tau_i}(x), \tilde{f} \right\rangle - \left\langle u_{\tau_{i-1}}(x), \tilde{f} \right\rangle \right) =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n_T} \epsilon_i \cdot \left(u_{\tau_i}(x) - u_{\tau_{i-1}}(x) \right), \tilde{f} \right\rangle.$$

Отсюда (см. конец доказательства теоремы в § 7.2)

$$V_T \le \left\| \tilde{f} \right\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n_T} \epsilon_i \cdot \left(u_{\tau_i}(x) - u_{\tau_{i-1}}(x) \right) \right\| = \|f\|,$$

поскольку

$$\left\| \tilde{f} \right\| = \|f\|, \qquad \left\| \sum_{i=1}^{n_T} \epsilon_i \cdot \left(u_{\tau_i}(x) - u_{\tau_{i-1}}(x) \right) \right\| = 1,$$

здесь функция $\sum\limits_{i=1}^{n_T} \epsilon_i \cdot \left(u_{\tau_i}(x) - u_{\tau_{i-1}}(x) \right)$ ступенчатая, так как

$$\epsilon_i = \pm 1,\ 0, \qquad u_{\tau_i}(x) - u_{\tau_{i-1}}(x) = \begin{cases} 1, & \tau_{i-1} \le x < \tau_i; \\ 0, & x \notin [\tau_{i-1}, \tau_i). \end{cases}$$

Итак, для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ выполняется неравенство $V_T \le \|f\|$, т. е. $\varphi(\tau)$ — функция ограниченной вариации на $[a,b]$.

Пусть теперь $y(x)$ — произвольная непрерывная на $[a,b]$ функция, построим новую ступенчатую функцию, соответствующую разбиению T отрезка $[a,b]$,

$$z_T(x) = \sum_{i=1}^{n_T} y(\tau_i)\cdot\left[u_{\tau_i}(x) - u_{\tau_{i-1}}(x)\right],$$

$z_T(x)$ ограничена, т. е. $z_T(x) \in M[a,b]$. Подействуем на нее продолженным функционалом $\tilde{f}$, получаем

$$\left\langle z_T(x), \tilde{f}\right\rangle = \sum_{i=1}^{n_T} y(\tau_i)\cdot[\varphi(\tau_i) - \varphi(\tau_{i-1})] = \sigma(T,\tau,y,\varphi)$$

интегральную сумму Римана–Стилтьеса для функции $y(x)$ по функции $\varphi(x)$, соответствующую разбиению T отрезка $[a,b]$ и выбору точек $\xi_i = \tau_i$. Поскольку любая функция, непрерывная на $[a,b]$, интегрируема по Стилтьесу на $[a,b]$ по всякой функции ограниченной вариации на $[a,b]$ (см. теорему 2 из § 6.3), то существует предел

$$\lim_{\delta_T\to 0}\left\langle z_T(x), \tilde{f}\right\rangle = \lim_{\delta_T\to 0}\sigma(T,\tau,y,\varphi) = \int_a^b y(x)\,d\varphi(x).$$

С другой стороны,

$$z_T(x) - y(x) = z_T(x) - y(x)\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n_T}\left[u_{\tau_i}(x) - u_{\tau_{i-1}}(x)\right]}_{\equiv 1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_T}(y(\tau_i) - y(x))\cdot\left[u_{\tau_i}(x) - u_{\tau_{i-1}}(x)\right],$$

$$\|z_T(x) - y(x)\| =$$

$$= \sup_{[a,b]} \left| \sum_{i=1}^{n_T} (y(\tau_i) - y(x)) \cdot \left[u_{\tau_i}(x) - u_{\tau_{i-1}}(x) \right] \right| \to 0$$

при $\delta_T \to 0$ (так как $\forall x \in [a,b]$ в рассматриваемой сумме лишь одно слагаемое не ноль при $\tau_{i-1} \le x < \tau_i$). Поэтому в силу непрерывности функционала $\tilde{f}$

$$\lim_{\delta_T \to 0} \left\langle z_T(x) - y(x), \tilde{f} \right\rangle = 0;$$

$$\lim_{\delta_T \to 0} \left\langle z_T(x), \tilde{f} \right\rangle = \left\langle y(x), \tilde{f} \right\rangle \overset{\text{на } C[a,b]}{=} \langle y(x), f \rangle.$$

Таким образом, доказано равенство

$$\left\langle y(x), \tilde{f} \right\rangle = \int_a^b y(x)\, d\varphi(x).$$

Вычислим норму функционала. Поскольку для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ выполняется неравенство $V_T \le \|f\|$, то $V_a^b \varphi = \sup\limits_T V_T \le \|f\|$.

С другой стороны (по свойству 4 интеграла Стилтьеса §6.2),

$$\left| \left\langle y(x), \tilde{f} \right\rangle \right| = \left| \int_a^b y(x)\, d\varphi(x) \right| \le$$

$$\le \max_{[a,b]} |y(x)| \cdot V_a^b \varphi(x) \overset{\|y(x)\| \le 1}{\le} V_a^b \varphi(x),$$

тогда (см. §7.2) $\|f\| \le V_a^b \varphi(x)$, откуда и следует равенство для нормы

$$\|f\| = V_a^b \varphi(x).$$

Теорема Ф. Рисса доказана.

Лемма. *Всякий функционал вида*

$$\langle y(x), f \rangle = \int_a^b y(x)\, d\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — функция ограниченной вариации на $[a,b]$, является линейным непрерывным функционалом на $C[a,b]$.

Доказательство. Линейность функционала следует из свойства линейности интеграла Стилтьеса (см. § 6.2). Покажем его непрерывность. Пусть некоторое семейство функций $y_\alpha(x) \to 0$ в $C[a,b]$ при $\alpha \to \alpha_0$, т. е. $\|y_\alpha(x)\| = \max\limits_{[a,b]} |y_\alpha(x)| \to 0$ при $\alpha \to \alpha_0$, тогда

$$|\langle y_\alpha(x), f\rangle| \le \max_{[a,b]} |y_\alpha(x)| \cdot V_a^b \varphi(x) \to 0,$$

что и означает непрерывность функционала f на $C[a,b]$. **Лемма доказана.**

Замечание 1. Функция $\varphi(x)$ из теоремы Ф. Рисса может быть заменена на функцию $\psi(x)$, совпадающую с $\varphi(x)$ в точках непрерывности $\varphi(x)$, непрерывную слева во всех внутренних точках (a,b) (т. е. $\psi(x-0) = \psi(x)$) и $\psi(a) = 0$. По умолчанию всегда предполагается функция $\varphi(x)$ именно такой.

Замечание 2. Теорема Ф. Рисса дает общий вид линейных непрерывных функционалов на $C[a,b]$ в том смысле, что полученной формулой при всевозможных функциях ограниченной вариации $\varphi(x)$ выражаются *ВСЕ* линейные непрерывные функционалы на $C[a,b]$.

Пример 1. Найти норму функционала $f\colon C[-1,1] \to R$, действующего по формуле

$$\langle y(x), f\rangle = \frac{y(-1)+y(1)}{2} - \int_0^1 xy(x)\,dx.$$

По теореме Ф. Рисса и теореме о вычислении интеграла Стилтьеса (см. теорему 4 из § 6.3)

$$\langle y(x), f\rangle = \int_{-1}^{1} y(x)\,d\varphi(x) =$$

$$= \int_{-1}^{1} y(x)\varphi'(x)\,dx + y(-1)(\varphi(-1+0) - \varphi(-1)) +$$
$$+ y(0)(\varphi(0+0) - \varphi(0-0)) + y(1)(\varphi(1) - \varphi(1-0)).$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi'(x) = 0, \quad x \in (-1,0); \\ \varphi'(x) = -x, \quad x \in (0,1); \\ \varphi(-1) = 0; \\ \varphi(-1+0) - \varphi(-1) = \dfrac{1}{2}; \\ \varphi(0+0) - \varphi(0-0) = \dfrac{1}{2}; \\ \varphi(1) - \varphi(1-0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(x) = C_1, \quad x \in (-1,0); \\ \varphi(x) = -\dfrac{x^2}{2} + C_2, \quad x \in (0,1); \\ \varphi(-1) = 0; \\ \varphi(-1+0) = \dfrac{1}{2} = C_1; \\ \varphi(0-0) = \dfrac{1}{2}; \\ \varphi(0+0) = 1 = C_2; \\ \varphi(1-0) = \dfrac{1}{2}; \\ \varphi(1) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x = -1; \\ \dfrac{1}{2}, & x \in (-1,0]; \\ -\dfrac{x^2}{2} + 1, & x \in (0,1]. \end{cases}$$

Поэтому

$$\|f\| = V_{-1}^{1}\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Пример 2. Для функционала $f : C[-1, 1] \to R$, действующего по формуле

$$\langle y(x), f \rangle = y(-1) - 2y(0) + y(1),$$

функция $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x = \pm 1; \\ 1, & x \in (-1, 0]; \\ -1, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Отсюда получаем $\|f\| = 4$.

Пример 3. Для функционала $f : C[-1, 1] \to R$, действующего по формуле

$$\langle y(x), f \rangle = \int\limits_{-1}^{1} \frac{y(x) - y(0)}{1 + x^2}\, dx,$$

функция $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{4}, & x \in [-1, 0]; \\ \operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{4}, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Отсюда получаем $\|f\| = \pi$.

Общий вид функционалов в $L_p[a, b]$. Всякий линейный непрерывный функционал на $L_p[a, b]$ можно представить в виде

$$\langle y(x), f \rangle = \int\limits_{a}^{b} y(x)\alpha(x)\, dx,$$

где $\alpha(x) \in L_q[a,b]$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, причем

$$\|f\| = \left(\int_a^b |\alpha(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{т. е.} \quad (L_p[a,b])^* \equiv L_q[a,b].$$

Общий вид функционалов в гильбертовом пространстве. Всякий линейный непрерывный функционал на гильбертовом пространстве представим в виде

$$\langle y(x), f \rangle = (x, v),$$

где v — элемент гильбертова пространства, определяемый функционалом, причем

$$\|f\| = \|v\| = \sqrt{(v,v)}.$$

7.4. Хаусдорфовость метрических пространств в естественной топологии

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. В § 7.1 текущей главы было введено понятие открытой ϵ-окрестности точки в метрическом пространстве. Воспроизведем его здесь.

Определение. *Открытой ϵ-окрестностью* точки a в метрическом пространстве (X, ρ) (*открытым шаром* радиуса ϵ точки a) называется множество

$$\sigma_a(\epsilon) \equiv \mathcal{O}(a, \epsilon) \equiv \mathcal{U}_\epsilon(a) \equiv \{x : x \in X, \ \rho(a, x) < \epsilon\}.$$

Соответственно *замкнутой ϵ-окрестностью* точки a в метрическом пространстве (X, ρ) (*замкнутым шаром* радиуса ϵ точки a) называется множество

$$\overline{\sigma_a(\epsilon)} \equiv \overline{\mathcal{O}(a, \epsilon)} \equiv \overline{\mathcal{U}_\epsilon(a)} \equiv K(a, \epsilon) \equiv \{x : x \in X, \ \rho(a, x) \leq \epsilon\}.$$

Очевидно, при $\epsilon_1 < \epsilon_2$

$$\sigma_a(\epsilon_1) \subset \sigma_a(\epsilon_2), \quad \overline{\sigma_a(\epsilon_1)} \subset \overline{\sigma_a(\epsilon_2)}.$$

Определение. Точка $a \in A \subset X$ называется *внутренней точкой* множества A, если она входит в A вместе с некоторой своей открытой ϵ-окрестностью. Соответственно множество A называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Пример. Любая ϵ-окрестность для всякой точки $a \in X$ является открытым множеством. Действительно, если $x_1 \in \sigma_a(\epsilon)$ — произвольная точка окрестности точки a, то $\rho_1 = \rho(a, x_1) < \epsilon$. Пусть $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon - \rho_1}{2} > 0$, тогда для любой точки $x \in \sigma_{x_1}(\epsilon_1)$ справедлива цепочка неравенств

$$\rho(x,a) \leq \rho(x,x_1)+\rho(x_1,a) < \epsilon_1+\rho_1 = \frac{\epsilon-\rho_1}{2}+\rho_1 = \frac{\epsilon}{2}+\frac{\rho_1}{2} < \epsilon,$$

которая означает включение $\sigma_{x_1}(\epsilon_1) \subset \sigma_a(\epsilon)$.

Введенные открытые множества обладают следующими свойствами.

Свойство 1. *Если A_1, A_2 — открытые множества, то их пересечение $A_1 \cap A_2$ — открытое множество. (Соответственно пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто.)*

Свойство 2. *Если $\{A_\alpha\}$ — семейство открытых множеств, то их объединение $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ — открытое множество.*

Доказательство. 1. Пусть $x \in A_1 \cap A_2$ — произвольная точка, так как A_1, A_2 — открытые множества, то существуют окрестности $\sigma_x(\epsilon_1) \subset A_1$ и $\sigma_x(\epsilon_2) \subset A_2$. Если $\epsilon < \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$, то $\sigma_x(\epsilon) \subset \sigma_x(\epsilon_1) \subset A_1$ и $\sigma_x(\epsilon) \subset \sigma_x(\epsilon_2) \subset$ $\subset A_2$, т. е. $\sigma_x(\epsilon) \subset A_1 \cap A_2$.

2. Пусть $x \in \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$, тогда существует α_0 такое, что $x \in A_{\alpha_0}$, но A_{α_0} — открытое множество, поэтому существует окрестность $\sigma_x(\epsilon) \subset A_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$. **Свойства доказаны.**

Таким образом, введенные открытые множества задают топологию, которую называют *естественной топологией* метрического пространства. Это пространство хаусдорфово. Действительно, если $x_1 \neq x_2$ -- произвольные точки метрического пространства (X, ρ), $\rho_0 = \rho(x_1, x_2) > 0$, тогда окрестности $\sigma_{x_1}\left(\frac{\rho_0}{3}\right)$ и $\sigma_{x_2}\left(\frac{\rho_0}{3}\right)$ не пересекаются. Если бы это было не так, т. е. существовала бы точка $y \in \sigma_{x_1}\left(\frac{\rho_0}{3}\right) \cap \sigma_{x_2}\left(\frac{\rho_0}{3}\right)$, то

$$\rho_0 = \rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_1, y) + \rho(y, x_2) < \frac{\rho_0}{3} + \frac{\rho_0}{3} = \frac{2\rho_0}{3},$$

т. е. $\rho_0 = 0$, что невозможно.

7.5. Внутренние, внешние и граничные точки множества в метрических пространствах

Любое открытое множество A, содержащее точку x, называется *окрестностью* точки x. Соответственно, всякое множество A метрического пространства X, дополнение которого $(X \setminus A)$ открыто, называется *замкнутым*. *Внешней* точкой множества A называется всякая внутренняя точка его дополнения $(X \setminus A)$. Точка z называется *граничной* точкой множества A, если она не является ни внутренней, ни внешней точкой этого множества. Множество всех граничных точек A называется *границей* множества и обозначается ∂A.

Свойства граничных точек

Свойство 1. *Если $B \equiv (X \setminus A)$, то $\partial B \equiv \partial A$.*

Свойство 2. *Если A замкнуто, то $\partial A \subset A$.*

Доказательство. 1. Пусть $z \in \partial A$, тогда любая окрестность z содержит как точки множества A, так и точки множества B, поэтому $z \in \partial B$, т. е. $\partial A \subset \partial B$. Аналогично проверяется обратное включение $\partial B \subset \partial A$, что и означает равенство множеств $\partial B \equiv \partial A$.

2. Так как множество $B \equiv (X \setminus A)$ открыто, то его граница ∂B не принадлежит B, а значит она принадлежит дополнению $X \setminus B \equiv A$, т. е. $\partial B \subset A$, но $\partial B \equiv \partial A$, поэтому $\partial A \subset A$. **Свойства доказаны.**

Определение 1. Точка a называется *предельной точкой* множества A, если для любого $\epsilon > 0$ ϵ-окрестность точки a $\sigma_a(\epsilon)$ содержит хотя бы одну точку $x \in A$, $x \neq a$.

Это же понятие можно ввести иначе.

Определение 2. Точка a называется *предельной точкой* множества A, если существует последовательность точек $\{x_n\} \in A$, $x_n \neq a$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (т. е. $\rho(x_n, a) \to 0$ при $n \to \infty$) (см. § 7.1).

Лемма. *Определения 1 и 2 эквивалентны.*

Доказательство. 1. Покажем, что из первого определения следует второе. Рассмотрим числовую последовательность $\epsilon_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in N$, тогда $\forall \epsilon_n = \dfrac{1}{n} > 0$ найдется $x_n \in A$, $x_n \neq a$ такое, что $x_n \in \sigma_a(\epsilon_n)$, т. е. $0 \leq \rho(x_n, a) < \epsilon_n = \dfrac{1}{n}$, что означает $\rho(x_n, a) \to 0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

2. Покажем обратную импликацию. Поскольку последовательность $\{x_n\}$ имеет бесконечное количество членов и вне любой ϵ-окрестности точки a $\sigma_a(\epsilon)$ находится лишь конечное число членов последовательности, то в $\sigma_a(\epsilon)$ всегда имеется хотя бы один член последовательности $\{x_n\} \in A$, $x_n \neq a$. **Лемма доказана.**

Замечание. Очевидно, что всякая внутренняя точка (см. § 7.4) является предельной, а также всякая граничная точка является предельной.

Определение 3. Если точка $a \in A$ и a не является предельной точкой множества A, то a называется *изолированной точкой* множества A.

Лемма (о свойствах сходящихся последовательностей в метрическом пространстве). *Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел a в метрическом пространстве (X, ρ), тогда:*

1) *предел a единственный;*
2) *последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна;*
3) *любая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ сходится к a.*

Доказательство. 1 (*от противного*). Пусть сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела $a \neq b$, $\rho_0 = \rho(a, b) > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то для $\epsilon = \dfrac{\rho_0}{3}$ найдется номер N_1 такой, что для любого $n > N_1$ выполняется неравенство $\rho(x_n, a) < \dfrac{\rho_0}{3}$, т. е. $x_n \in \sigma_a\left(\dfrac{\rho_0}{3}\right)$. Аналогично из предельного равенства $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ следует, что найдется номер N_2 такой, что для любого $n > N_2$ выполняется неравенство $\rho(x_n, b) < \dfrac{\rho_0}{3}$, т. е. $x_n \in \sigma_b\left(\dfrac{\rho_0}{3}\right)$. Тогда для любого $n > \max\{N_1, N_2\}$ имеет место включение $x_n \in \sigma_a\left(\dfrac{\rho_0}{3}\right) \cup \sigma_b\left(\dfrac{\rho_0}{3}\right)$. Однако окрестности $\sigma_a\left(\dfrac{\rho_0}{3}\right)$ и $\sigma_b\left(\dfrac{\rho_0}{3}\right)$ не пересекаются (см. § 7.4). Полученное противоречие означает единственность предела сходящейся последовательности элементов в метрическом пространстве.

2. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то для любого $\epsilon > 0$ найдется номер N_0 такой, что для любого $n > N_0$ выполняется неравенство $\rho(x_n, a) < \dfrac{\epsilon}{2}$, поэтому для любых номеров $n, m > N_0$ выполняются неравенства

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_m, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

что означает фундаментальность последовательности $\{x_n\}$ (см. § 7.1).

3. Для доказательства необходимо продублировать рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы о пределе подпоследовательности сходящейся последовательности (см. § 2.5). Действительно, так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\forall\epsilon > 0\ \exists N_\epsilon$ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ выполняется неравенство $\rho(x_n, a) < \epsilon$. Так как $k_n \geq n$, то $\forall k_n \geq k_{N_\epsilon} > N_\epsilon$ справедливо неравенство $\rho(x_{k_n}, a) < \epsilon$, а это означает $\lim\limits_{k_n\to\infty} x_{k_n} = a$.

Лемма доказана.

Теорема (критерии замкнутости). 1. *Множество A метрического пространства (X, ρ) является замкнутым тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

2. *Множество A метрического пространства (X, ρ) является замкнутым тогда и только тогда, когда его граница принадлежит A, т. е. $\partial A \subset A$.*

Доказательство. 1. *Необходимость.* Пусть a — произвольная предельная точка множества A, тогда существует последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in A$, $x_n \neq a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Точка a не может быть внешней точкой множества A, так как в любой ее ϵ-окрестности $\sigma_a(\epsilon)$ есть точки множества A, поэтому либо a — внутренняя точка множества A, либо граничная, $a \in \partial A$. В том и другом случае $a \in A$.

Достаточность. Пусть множество A содержит все свои предельные точки, покажем, что его дополнение $B \equiv (X \setminus A)$ открыто, т. е. любая его точка $x \in B$ внутренняя. Пусть $x \in B$ — произвольная точка, либо x — внутренняя точка B (и тогда доказывать нечего), либо $x \in \partial B$ — граничная точка. Но тогда $x \notin A$ и $x \in \partial B \equiv \partial A$, т. е. в любой окрестности x содержатся точки множества A, и значит x — предельная точка для A, т. е. по условию теоремы $x \in A$, что невозможно, поскольку $A \cap B = \emptyset$. Таким образом, $x \notin \partial B$, и значит все точки множества

$B \equiv (X \setminus A)$ внутренние, т. е. B открыто.

2. *Необходимость.* Пусть A замкнуто, тогда в силу свойства 2 граничных точек $\partial A \subset A$.

Достаточность. Пусть $\partial A \subset A$, но $\partial B \equiv \partial A$, где $B \equiv (X \setminus A)$, поэтому $\partial B \subset A$, и значит $\partial B \cap B = \emptyset$, т. е. граничные точки множества B не принадлежат ему. Таким образом, в B входят только внутренние точки, т. е. B открыто, а значит A замкнуто. **Теорема доказана.**

7.6. Лемма о вложенных шарах. Принцип сжимающих отображений

Лемма (о вложенных шарах). *Пусть* $K(x_n, r_n) \equiv \equiv \overline{\sigma_{x_n}(r_n)}$ *— последовательность замкнутых вложенных шаров* $K(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset K(x_n, r_n)$ *полного метрического пространства* (X, ρ), *причем* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, *тогда существует единственная точка* x_0, *принадлежащая всем шарам* $K(x_n, r_n)$, $n \in N$.

Доказательство. Последовательность центров шаров $\{x_n\}$ является фундаментальной. Действительно, так как $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, то для любого $\epsilon > 0$ существует номер $N_\epsilon \in N$ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ выполняется неравенство $r_n < \dfrac{\epsilon}{2}$. Но в силу вложенности шаров $\forall n_1 > n_2 > n > N_\epsilon$ справедливо включение $K(x_{n_1}, r_{n_1}) \subset K(x_{n_2}, r_{n_2}) \subset K(x_n, r_n)$ и неравенство $\rho(x_{n_1}, x_{n_2}) < 2r_n < \epsilon$, которое и означает фундаментальность последовательности $\{x_n\}$.

Поскольку метрическое пространство (X, ρ) является полным, то фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \in X$. Поскольку все $x_n \in K(x_m, r_m)$ при $n > m$, то x_0 — предельная точка для любого шара $K(x_n, r_n)$ и в силу его замкнутости принадлежит ему, т. е. $x_0 \in K(x_n, r_n)$ $\forall n \in N$.

Докажем теперь единственность точки x_0 методом от противного. Пусть $y_0 \neq x_0$, $y_0 \in K(x_n, r_n)$ $\forall n \in N$,

$\rho_0 = \rho(x_0, y_0) \neq 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, то существует номер N_{ρ_0} такой, что $\forall n > N_{\rho_0}$ выполняется неравенство $r_n < \dfrac{\rho_0}{3}$, тогда

$$0 < \rho_0 = \rho(x_0, y_0) \le \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y_0) < r_n + r_n < \frac{2\rho_0}{3},$$

что невозможно. Следовательно, точка x_0 является единственной общей точкой всех шаров $K(x_n, r_n)$. **Лемма доказана.**

Определение. Отображение $f : X \to X$ метрического пространства (X, ρ) в себя называется *сжимающим*, если существует число $0 < \alpha < 1$ такое, что для любых двух элементов $x, y \in X$ выполняется неравенство

$$\rho(f(x), f(y)) < \alpha\rho(x, y).$$

Теорема (принцип сжимающих отображений). *Сжимающее отображение полного метрического пространства (X, ρ) в себя имеет единственную неподвижную точку (т. е. такую точку $x_0 \in X$, что $f(x_0) = x_0$).*

Доказательство. Пусть $x_1 \in X$ — произвольная точка метрического пространства (X, ρ), построим рекуррентную последовательность $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, ..., $x_n = f(x_{n-1})$, ... и покажем, что она фундаментальна. Во-первых, заметим, что

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) \le \alpha\rho(x_{n-1}, x_n) =$$
$$= \alpha\rho(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \le \alpha^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \le$$
$$\le \ldots \le \alpha^{n-1}\rho(x_1, x_2),$$

тогда

$$0 \le \rho(x_n, x_{n+m}) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) +$$
$$+ \ldots + \rho(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \le$$

$$\leq \left(\alpha^{n-1} + \alpha^n + \ldots + \alpha^{n+m-2}\right) \rho(x_1, x_2) < \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\rho(x_1, x_2).$$

Так как $0 < \alpha < 1$, то $\dfrac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $N_\epsilon \in N$ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ выполняется неравенство

$$0 \leq \rho(x_n, x_{n+m}) < \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\rho(x_1, x_2) < \epsilon,$$

что и означает фундаментальность рекуррентной последовательности $\{x_n\}$. Поскольку метрическое пространство (X, ρ) полное, то последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу $x_0 \in X$.

Докажем теперь, что x_0 — неподвижная точка отображения f, т. е. $x_0 = f(x_0)$. От противного. Пусть $f(x_0) = y_0 \neq x_0$, тогда $\rho_0 = \rho(x_0, y_0) > 0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то существует номер N такой, что $\forall n > N$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x_0) < \dfrac{\rho_0}{3}$, тогда

$$\rho(x_{n+1}, y_0) = \rho(f(x_n), f(x_0)) \leq \alpha\rho(x_n, x_0) < \frac{\rho_0}{3}.$$

Следовательно,

$$0 < \rho_0 = \rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, y_0) <$$

$$< \frac{\rho_0}{3} + \frac{\rho_0}{3} = \frac{2\rho_0}{3},$$

что невозможно. Итак, x_0 — неподвижная точка отображения $f(x)$. Единственность такой точки следует из того, что если бы неподвижных точек было две x_0 и y_0, $x_0 \neq y_0$ (или более), $x_0 = f(x_0)$, $y_0 = f(y_0)$, то

$$0 < \rho(x_0, y_0) = \rho(f(x_0), f(y_0)) \leq \alpha\rho(x_0, y_0) < \rho(x_0, y_0),$$

что невозможно. **Теорема доказана.**

7.7. Непрерывные отображения метрических пространств

Пусть задана пара метрических пространств (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y). Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого $x \in X$, удовлетворяющего условию $\rho_X(x, x_0) < \delta_\epsilon$, выполняется неравенство $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, т.е. в пространстве Y ϵ-окрестность точки $f(x_0)$, а именно множество $\sigma_{f(x_0)}(\epsilon)$, целиком содержит в себе образ δ_ϵ-окрестности точки x_0 или множества $\sigma_{x_0}(\delta_\epsilon)$ при отображении f, $f(\sigma_{x_0}(\delta_\epsilon)) \subset \sigma_{f(x_0)}(\epsilon)$. Очевидно, сжимающее отображение непрерывно, достаточно положить $\delta_\epsilon = \epsilon$.

Теорема (о непрерывности сложного отображения). *Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, f непрерывно в точке $x_0 \in X$, g непрерывно в точке $y_0 = f(x_0) \in Y$, тогда композиция отображений $h = g(f) : X \to Z$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Так как g непрерывно в точке y_0, для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого $y \in Y$, удовлетворяющего условию $\rho_Y(y, y_0) < \delta_\epsilon$, выполняется неравенство $\rho_Z(g(y), g(y_0)) < \epsilon$. Но отображение f непрерывно в точке $x_0 \in X$, поэтому для $\delta_\epsilon > 0$ найдется $\eta_{\delta_\epsilon} > 0$ такое, что для любого $x \in X$, удовлетворяющего условию $\rho_X(x, x_0) < \eta_{\delta_\epsilon}$, выполняется неравенство $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \delta_\epsilon$, но тогда $\rho_Z(g(f(x)), g(f(x_0))) < \epsilon$, что и означает непрерывность сложного отображения. **Теорема доказана.**

Теорема (предельная форма записи свойства непрерывности). *Пусть последовательность $x_n \in X$ сходится к элементу $x_0 \in X$, отображение $f : X \to Y$ непрерывно в точке x_0, тогда*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \quad \left(\text{или } f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)\right).$$

Доказательство. Так как f непрерывно в точке x_0, то для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого $x \in X$, удовлетворяющего условию $\rho_X(x, x_0) < \delta_\epsilon$, выполняется неравенство $\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то для $\delta_\epsilon > 0$ найдется номер N_{δ_ϵ} такой, что для любого $n > N_{\delta_\epsilon}$ выполняется неравенство $\rho_X(x_n, x_0) < \delta_\epsilon$, но тогда $\rho_Y(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$, что и означает утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

Замечание. Если G — открытое множество метрического пространства (X, ρ_X) и отображение $f : X \to Y$ непрерывно на нем, то $f(G)$ — открытое множество метрического пространства (Y, ρ_Y).

7.8. Компактные множества метрических пространств и их свойства. Свойства функций, непрерывных на компактах и на связных множествах. Полнота пространства R^n и компакты в нем

Определение. Множество $K \subset X$ называется *компактным* в метрическом пространстве (X, ρ), если из любого покрытия K открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Определение. Множество $B \subset X$ называется *ограниченным* в метрическом пространстве (X, ρ), если оно содержится в некотором шаре конечного радиуса $B \subset \sigma_{x_0}(r)$.

Теорема (свойства компактных множеств). *Если K — компактное множество в метрическом пространстве (X, ρ), то*

1. *K — ограниченное множество;*
2. *Любая последовательность $\{x_n\} \subset K$ имеет хотя бы одну предельную точку в K;*
3. *K — замкнутое множество;*

4. *Замкнутое подмножество множества K компактно.*

Доказательство. 1. Пусть $x_0 \in K$, тогда расширяющееся счетное семейство открытых шаров вида $\{\sigma_{x_0}(n),\ n \in N\}$ покрывает все метрическое пространство (X, ρ), а значит и K. Но K — компактное множество, поэтому из системы $\{\sigma_{x_0}(n),\ n \in N\}$ можно выделить конечное подпокрытие

$$\sigma_{x_0}(n_1) \subset \sigma_{x_0}(n_2) \subset \ldots \subset \sigma_{x_0}(n_k), \quad n_1 < n_2 < \ldots < n_k,$$

причем $K \subset \sigma_{x_0}(n_k)$, что и означает ограниченность множества K.

2. Доказательство проведем методом от противного. Пусть существует бесконечная последовательность $\{x_n\} \subset K$, не имеющая предельных точек в K, т.е. любая точка $x \in K$ не является предельной для последовательности $\{x_n\}$. Это значит, что существует окрестность $\sigma_x(\epsilon_x)$ точки x, не содержащая точек последовательности $\{x_n\}$ (кроме, быть может, самой точки x). В результате получено открытое покрытие множества K, из которого можно выделить конечное подпокрытие. Это означает, что точками множества K, принадлежащими последовательности $\{x_n\}$, могут быть лишь центры выбранных ϵ_x-окрестностей, $\sigma_{x_i}(\epsilon_{x_i})$, $i = 1, \ldots, n$, а их конечное число, т.е. множество точек последовательности $\{x_n\}$ конечно, что противоречит условию теоремы.

3. Пусть x_0 — произвольная предельная точка множества K, тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset K$, $x_n \to x_0$. В силу свойства 2 и единственности предела сходящейся последовательности $x_0 \in K$.

4. Пусть $M \subset K$ — замкнутое подмножество множества K, $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ — открытое покрытие M. Если семейство $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ образует покрытие и для K, то, выделив из него конечное подпокрытие для K, получим конечное подпокрытие и для M. Если $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ не является покрытием для K, рассмотрим множество $K \setminus \bigcup\limits_\alpha \mathcal{U}_\alpha$, причем $M \subset \bigcup\limits_\alpha \mathcal{U}_\alpha$. Для каждой точки $x \in K \setminus \bigcup\limits_\alpha \mathcal{U}_\alpha$ в силу хаусдорфовости метрического пространства (X, ρ) существует ϵ_x-окрестность $\sigma_x(\epsilon_x)$ такая, что $\sigma_x(\epsilon_x) \cap M = \emptyset$. Система множеств

$$\left(\bigcup_{x \in K \setminus \left(\bigcup\limits_\alpha \mathcal{U}_\alpha\right)} \sigma_x(\epsilon_x) \right) \bigcup \left(\bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha \right)$$

образует открытое покрытие для K, из которого можно выделить конечное подпокрытие, удаляя из которого все $\sigma_{x_i}(\epsilon_{x_i})$, получим конечное подпокрытие для M, выделенное из $\{\mathcal{U}_\alpha\}$. **Теорема доказана.**

Замечание 1. Если отображение $f(x)$ непрерывно на компакте K, то множество $f(K)$ компактно в (Y, ρ_Y).

Без доказательства приведем критерий компактности в (X, ρ).

Теорема (критерий компактности). *Для того чтобы множество K метрического пространства (X, ρ) было компактно, необходимо и достаточно, чтобы каждая центрированная система его замкнутых подмножеств имела непустое пересечение.*

Замечание 2. Систему подмножеств $\{A_\alpha\}$ множества A называют *центрированной*, если любое конечное подсемейство этой системы имеет непустое пересечение.

При исследовании на компактность множеств в метрических пространствах может оказаться полезной следующая теорема.

Теорема. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Множество K компактно в (X, ρ);*

2. *Для любого $\epsilon > 0$ в K существует конечная ϵ-сеть (т. е. существует конечное число точек множества $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in K$ таких, что $\forall x \in K$ найдется x_i, для которой $\rho(x, x_i) < \epsilon$);*

3. *Множество K секвенциально компактно в (X, ρ) (т. е. из любой последовательности точек множества K можно выделить сходящуюся подпоследовательность);*

4. *Множество K счетно компактно в (X, ρ) (т. е. любое бесконечное подмножество множества K имеет в K хотя бы одну предельную точку).*

Справедлив следующий аналог теоремы Вейерштрасса о функциях, непрерывных на отрезке (компакте) (см. § 3.7).

Теорема (задача оптимизации). *Пусть $f : K \to R$, K — компактное множество метрического пространства (X, ρ), f — непрерывный функционал на K, тогда*

1) *f ограничен на K;*

2) *сущесвуют точки $x_1, x_2 \in K$ такие, что*

$$f(x_1) = M = \sup_K f(x), \quad f(x_2) = m = \inf_K f(x).$$

Доказательство. 1. Функционал $f(x)$ непрерывен на K, т. е. если $x_0 \in K$, то для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta_{\epsilon,x_0} > 0$, что для любого x_1 такого, что $\rho(x_1, x_0) < \delta_{\epsilon,x_0}$, справедливо неравенство $|f(x_1) - f(x_0)| < \epsilon$ или $f(x_0) - \epsilon < f(x_1) < f(x_0) + \epsilon$, что означает локальную ограниченность функционала $f(x)$. Но система окрестностей $\{\sigma_{x_0}(\delta_{\epsilon,x_0}),\ x_0 \in K\}$ образует открытое покрытие множества K, из которого можно выделить конечное подпокрытие. В каждой из выделенных окрестностей $f(x)$ локально ограничен, и поскольку таких окрестностей конечное число, то функционал $f(x)$ ограничен на K.

2. Доказательство проведем методом от противного. Пусть ни в какой точке множества K функционал $f(x)$ не принимает значения M, тогда функционал $g(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$ непрерывен на компакте K и, следовательно, ограничен на нем, т. е. для любого $x \in K$ выполняется неравенство

$$0 < g(x) = \frac{1}{M - f(x)} < M_1$$

или

$$0 < \frac{1}{M_1} < M - f(x) \Rightarrow f(x) < M - \frac{1}{M_1} < M,$$

что противоречит утверждению $M = \sup\limits_K f(x)$. **Теорема доказана.**

Определение. Множество $A \subset X$ называется *связным* в метрическом пространстве (X, ρ), если при любом разбиении A на два непустых, непересекающихся подмножества A_1 и A_2 они будут иметь общую граничную точку, принадлежащую A, т. е. такую точку a, что

1) $a \in A$;
2) в любой ϵ-окрестности точки a, т. е. в $\sigma_a(\epsilon)$, есть как точки множества A_1, так и множества A_2, отличные от a.

Замечание 3. Связные открытые множества называют *областями*, а связные компактные — *континуумами*.

Пример. Отрезок, прямоугольник, круг — связные множества на R^2.

Справедлив следующий аналог теоремы Больцано–Коши о функциях, непрерывных на отрезке (компакте) (см. § 3.7).

Теорема (о промежуточном значении). *Пусть* $f : A \to R$, A *— связное множество метрического пространства* (X, ρ), $f(x)$ *— непрерывный функционал на* A,

$f(x_1) = a$, $f(x_2) = b$, $a < b$, $x_1, x_2 \in A$, *тогда* $\forall c \in (a, b)$ *найдется точка* $x_3 \in A$, *такая что* $f(x_3) = c$.

Доказательство. Рассмотрим пару множеств $M_1 \equiv \equiv \{x \in A,$ что $f(x) < c\}$, $M_2 \equiv A \backslash M_1$. Так как A — связное множество, то существует точка x_3 — граничная для M_1 и M_2, поэтому в любой окрестности $\sigma_{x_3}\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \in N$, есть точки $a_n \in M_1$ и $b_n \in M_2$. Очевидно, $0 < \rho(a_n, x_3) < \frac{1}{n} \to 0$ и $0 < \rho(b_n, x_3) < \frac{1}{n} \to 0$, т. е. $a_n \to x_3$ и $b_n \to x_3$, тогда (по теореме о предельной форме записи свойства непрерывности см. § 7.7)

$$f(x_3) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le c, \quad f(x_3) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge c,$$

$$\text{т. е. } f(x_3) = c.$$

Теорема доказана.

Перейдем теперь к описанию компактных множеств в конечномерных пространствах.

Теорема. *Любой замкнутый параллелепипед в R^n компактен. (Любая n-мерная клетка компактна.)*

Доказательство. Пусть $\mathcal{I}$ — n-мерный параллелепипед, т. е. множество точек $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ таких, что $a_j \le x_j \le b_j$, $j = 1, \ldots, n$. Введем обозначение (для длины «диагонали»)

$$d = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)^2},$$

тогда для любой пары точек $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{I}$

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2} \le d.$$

Предположим, что вопреки утверждению теоремы существует открытое покрытие $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ множества $\mathcal{I}$, не содержащее конечного подпокрытия $\mathcal{I}$. Положим $c_j = \dfrac{b_j + a_j}{2}$, тогда отрезки $[a_j, c_j]$ и $[c_j, b_j]$ определят 2^n новых параллелепипедов, объединение которых есть $\mathcal{I}$. Хотя бы один из этих параллелепипедов не допускает покрытия конечным подсемейством их $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ (в противном случае $\mathcal{I}$ был бы покрыт конечным подсемейством), обозначим этот параллелепипед $\mathcal{I}_1$, а его ребра $[a_{j1}, b_{j1}] \subset [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$. Теперь разобьем $\mathcal{I}_1$ точно также и продолжим этот процесс далее. В результате получим последовательность вложенных параллелепипедов $\{\mathcal{I}_k\}$, обладающих свойствами:

a) $\mathcal{I} \supset \mathcal{I}_1 \supset \mathcal{I}_2 \supset \ldots$;

b) каждый $\mathcal{I}_k$ не покрывается ни каким конечным подсемейством семейства $\{\mathcal{U}_\alpha\}$;

c) если $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{I}_k$, то $\rho(\bar{x}, \bar{y}) \le \dfrac{d}{2^k}$;

d) $[a_{jk}, b_{jk}] \subset [a_{jk-1}, b_{jk-1}]$, $j = 1, \ldots, n$, $k \in N$, $b_{jk} - a_{jk} < \dfrac{b_j - a_j}{2^k} \to 0$.

Из свойства d) в силу принципа вложенных отрезков (см. §1.5) существует единственная $x_j^* \in [a_{jk}, b_{jk}]$, $j = 1, \ldots, n$, $\forall k \in N$, тогда из свойства a) следует, что точка $\bar{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}$ $\forall k \in N$. При некотором α^* $\bar{x}^* \in \mathcal{U}_{\alpha^*}$, множество $\mathcal{U}_{\alpha^*}$ открыто, а значит существует окрестность $\sigma_{\bar{x}^*}(r) \subset \mathcal{U}_{\alpha^*}$. При достаточно большом k $r > \dfrac{d}{2^k}$, поэтому из свойства c) следует, что $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{U}_{\alpha^*}$, а это противоречит свойству b). **Теорема доказана.**

Теорема (полнота $\boldsymbol{R}^n$). *Метрическое пространство R^n с метрикой $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$ полно.*

Доказательство. Пусть $\{\bar{x}_k\}$ — произвольная фундаментальная последовательность в R^n, т.е. для $\epsilon_0 = 1$ существует номер N_{ϵ_0} такой, что $\forall k > N_{\epsilon_0}$ и $\forall m \in N$ справедливо неравенство $\rho(\bar{x}_k, \bar{x}_{k+m}) < \epsilon_0 = 1$. Зафиксируем некоторый номер $k_1 > N_{\epsilon_0}$, тогда вне окрестности $\sigma_{\bar{x}_{k_1}}(\epsilon_0)$ содержится лишь конечное число членов последовательности с номерами $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{k_1-1}\}$, если положить $d = \max\{\epsilon_0, \rho(\bar{x}_{k_1}, \bar{x}_1), \ldots, \rho(\bar{x}_{k_1}, \bar{x}_{k_1-1})\}$, то в шаре $\sigma_{\bar{x}_{k_1}}(d)$ окажутся все члены последовательности $\{\bar{x}_k\}$, что означает ее ограниченность. Поэтому последовательность $\{\bar{x}_k\}$ можно покрыть замкнутым параллелепипедом $\mathcal{I}$, который в силу предыдущей теоремы компактен. По свойству 2 компактных множеств последовательность $\{\bar{x}_k\}$ имеет в $\mathcal{I}$ предельную точку $\bar{x}_0 \in \mathcal{I}$. Последовательность $\bar{x}_k \to \bar{x}_0$, так как фундаментальтая последовательность не может иметь более одной предельной точки. **Теорема доказана.**

Теорема (критерий компактности в R^n). *Множество $K \subset R^n$ компактно тогда и только тогда, когда K замкнуто и ограничено.*

Доказательство. *Необходимость.* Если K компактно, то по свойствам 1 и 3 компактных множеств K замкнуто и ограничено.

Достаточность (от противного). Пусть существует покрытие замкнутого и ограниченного множества K открытыми множествами $\{\mathcal{U}_\alpha\}$, не допускающее выделения конечного подпокрытия. Так как K ограничено, то его можно поместить в n-мерный параллелепипед $K \subset \mathcal{I}$. Поделим $\mathcal{I}$ на 2^n равных параллелепипедов (аналогично тому, как это делалось в теореме о компактности n-мерной клетки). Один из таких параллелепипедов не допускает конечного подпокрытия. Повторяя все рассуждения из доказательства теоремы о компактности n-мерной клетки, получим противоречие, которое и будет означать компактность K. **Теорема доказана.**

Замечание 4. Критерием компактности в пространстве $C[a, b]$ является теорема Арцела – Асколи. В пространстве $L_p[a, b]$ критериями компактности являются теоремы М. Рисса, А. Н. Колмогорова, М. А. Красносельского.

8. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Введение. Предпошлем основным сведениям этой главы ряд определений и фактов теории конечномерных пространств (из главы 7), которые нужны для последующего изложения. *Вектором* (*точкой*) конечномерного пространства $\mathbf{R}^n$ называют любой упорядоченный набор вещественных чисел вида $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в котором числа $x_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$, называют *координатами* вектора (точки) $\bar{x}$. *Расстояние* между точками $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в $\mathbf{R}^n$ вычисляется по правилу

$$\rho_{\mathbf{R}^n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2},$$

очевидно, при $n = 1$, $\rho_{\mathbf{R}^1}(x, y) = |x - y|$. *Окрестностью* (открытой δ-окрестностью) точки $\bar{a}$ в $\mathbf{R}^n$ называется множество

$$\sigma_{\bar{a}}(\delta) \equiv \{\bar{x} : \rho_{\mathbf{R}^n}(\bar{x}, \bar{a}) < \delta\}.$$

Далее, если это не вызывает путаницы, в обозначении расстояния будем опускать индекс $\mathbf{R}^n$. Множество $A \subset \mathbf{R}^n$ называется *открытым* в $\mathbf{R}^n$, если любая его точка является *внутренней*, т. е. содержится в A вместе с некоторой своей δ-окрестностью $\sigma_{\bar{a}}(\delta)$. Точка $\bar{a}$ называется *предельной* для множества $A \subset \mathbf{R}^n$, если любая ее δ-окрестность $\sigma_{\bar{a}}(\delta)$ содержит элементы множества A или (на языке последовательностей) существует последовательность элементов $\{\bar{x}_k\} \in A$ (множества A), *сходящаяся* к $\bar{a}$ в $\mathbf{R}^n$, т. е.

$\rho(\bar{x}_k, \bar{a}) \to 0$ при $k \to \infty$. Множество $A \subset \mathbf{R}^n$ называется *замкнутым* в $\mathbf{R}^n$, если оно содержит все свои предельные точки. Множество $A \subset \mathbf{R}^n$ называется *ограниченным* в $\mathbf{R}^n$, если существует шар конечного радиуса R, содержащий в себе A, т.е. $A \subset \sigma_{\bar{0}}(R)$.

Определение. Множество $K \subset \mathbf{R}^n$ называется *компактным* в $\mathbf{R}^n$, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. (Определение покрытия см. в § 3.9.)

Теорема (критерий компактности в $\mathbf{R}^n$). *Множество $K \subset \mathbf{R}^n$ компактно в $\mathbf{R}^n$ тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено в $\mathbf{R}^n$.*

Определение. Последовательность точек $\{\bar{x}_k\}$ называется *фундаментальной* в $\mathbf{R}^n$, если $\forall \epsilon > 0$ существует номер N_ϵ такой, что $\forall k > N_\epsilon$ и $\forall p \in N$ выполняется неравенство $\rho\left(\bar{x}_k, \bar{x}_{k+p}\right) < \epsilon$.

Теорема (полнота $\mathbf{R}^n$). *Последовательность $\{\bar{x}_k\}$ сходится в $\mathbf{R}^n$ тогда и только тогда, когда она фундаментальна в $\mathbf{R}^n$.*

Необходимость этого утверждения доказывается точно так же, как доказывается необходимость критерия Коши сходимости числовой последовательности см. § 2.6. Докажем его достаточность. Из фундаментальности последовательности $\{\bar{x}_k\}$ и неравенства

$$\left|x_j^k - x_j^{k+p}\right| \le \rho_{\mathbf{R}^n}\left(\bar{x}_k, \bar{x}_{k+p}\right) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^k - x_j^{k+p}\right)^2}$$

следует фундаментальность (а значит, и сходимость) числовых последовательностей $\left\{x_j^k\right\}$, $j = 1, \ldots, n$, тогда последовательность $\{\bar{x}_k\}$ сходится к точке пространства $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$, координатами которой являются пределы последовательностей $\left\{x_j^k\right\}$, $j = 1, \ldots, n$.

Определение. Множество $L \subset \mathbf{R}^n$ называется *связным* в $\mathbf{R}^n$, если при любом разбиении L на два непустых, непересекающихся подмножества L_1 и L_2 они будут иметь общую граничную точку, принадлежащую L, т. е. такую точку $\bar{a}$, что $\bar{a} \in L$ и в любой δ-окрестности этой точки $\sigma_{\bar{a}}(\delta)$ есть как точки множества L_1, так и точки множества L_2, отличные от $\bar{a}$.

Замечание 1. Связные открытые множества называются *областями*, а связные компактные множества — *континуумами.*

Лемма (неравенство Коши – Буняковского для векторов). *Для любых двух векторов $\bar{a}$, $\bar{b} \in \mathbf{R}^n$ справедливо неравенство*

$$\left|(\bar{a},\, \bar{b})\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right| \le \|\bar{a}\|_{\mathbf{R}^n} \cdot \left\|\bar{b}\right\|_{\mathbf{R}^n} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2},$$

причем неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно зависимы (коллинеарны), т. е. существует $\lambda \in R$ такое, что $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}$.

Действительно, если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно независимы, т. е. $\forall \lambda \in R \quad \bar{b} - \lambda \cdot \bar{a} \neq 0$, тогда

$$0 < \left\|\bar{b} - \lambda \cdot \bar{a}\right\|_{\mathbf{R}^n}^2 = \sum_{j=1}^{n} (b_j - \lambda \cdot a_j)^2 =$$

$$= \lambda^2 \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - 2\lambda \sum_{j=1}^{n} a_j b_j + \sum_{j=1}^{n} b_j^2 = \lambda^2 \|\bar{a}\|_{\mathbf{R}^n}^2 - 2\lambda(\bar{a},\, \bar{b}) + \left\|\bar{b}\right\|_{\mathbf{R}^n}^2.$$

Поскольку построенный квадратный трехчлен строго положителен $\forall \lambda \in R$, то его дискриминант строго отрицателен, т. е.

$$4(\bar{a},\, \bar{b})^2 - 4\,\|\bar{a}\|_{\mathbf{R}^n}^2 \cdot \left\|\bar{b}\right\|_{\mathbf{R}^n}^2 < 0$$

или

$$\left|(\bar{a},\, \bar{b})\right| < \|\bar{a}\|_{\mathbf{R}^n} \cdot \left\|\bar{b}\right\|_{\mathbf{R}^n}.$$

Пусть теперь векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно зависимы, т.е. существует $\lambda_0 \in R$ такое, что $\bar{b} = \lambda_0 \cdot \bar{a}$, тогда

$$\left|(\bar{a},\, \bar{b})\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right| = |\lambda_0| \sum_{j=1}^{n} a_j^2 = |\lambda_0|\, \|\bar{a}\|^2_{\mathbf{R}^n}.$$

С другой стороны,

$$\|\bar{a}\|_{\mathbf{R}^n} \cdot \left\|\bar{b}\right\|_{\mathbf{R}^n} = \|\bar{a}\|_{\mathbf{R}^n} \cdot \|\lambda_0 \cdot \bar{a}\|_{\mathbf{R}^n} = |\lambda_0| \cdot \|\bar{a}\|^2_{\mathbf{R}^n},$$

т.е. $\left|(\bar{a},\, \bar{b})\right| = \|\bar{a}\|_{\mathbf{R}^n} \cdot \left\|\bar{b}\right\|_{\mathbf{R}^n}$. Теперь докажем утверждение в обратную сторону. Пусть для некоторой пары векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеет место равенство $\left|(\bar{a},\, \bar{b})\right| = \|\bar{a}\|_{\mathbf{R}^n} \cdot \left\|\bar{b}\right\|_{\mathbf{R}^n}$, тогда квадратное уравнение

$$\left\|\bar{b} - \lambda\bar{a}\right\|_{\mathbf{R}^n} = \lambda^2 \|\bar{a}\|^2_{\mathbf{R}^n} - 2\lambda(\bar{a},\, \bar{b}) + \left\|\bar{b}\right\|^2_{\mathbf{R}^n} = 0$$

имеет единственное решение $\tilde{\lambda} \in R$, т.е. $\left\|\bar{b} - \tilde{\lambda}\bar{a}\right\|_{\mathbf{R}^n} = 0$ и, следовательно, $\bar{b} = \tilde{\lambda}\bar{a}$, что означает линейную зависимость векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

8.1. Непрерывность функции в $\mathbf{R}^n$

Пусть $\bar{a}$ — некоторая точка пространства $\mathbf{R}^n$, $y = f(\bar{x})$ — числовая функция, определенная в некоторой окрестности точки $\bar{a}$.

Определение. Функция $y = f(\bar{x}) \equiv f(x_1, \ldots, x_n) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ называется *непрерывной* (по совокупности переменных) в точке $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$, если $\forall \epsilon > 0$ существует $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого $\bar{x}$, удовлетворяющего условию

$$\rho_{\mathbf{R}^n}(\bar{x}, \bar{a}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^2} < \delta_\epsilon,$$

выполняется неравенство

$$\rho_{\mathbf{R}^1}(f(\bar{x}), f(\bar{a})) = |f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \epsilon$$

(т. е. $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$).

Непрерывные числовые функции обладают свойством замкнутости относительно всех арифметических операций. Для числовых непрерывных на компакте функций справедлива теорема Вейерштрасса (задача оптимизации) (см. § 3.7 и § 7.8), а для непрерывных на связном множестве функций — теорема Больцано – Коши (о промежуточном значении) (см. там же). Приведем здесь их формулировки.

Теорема Вейерштрасса. *Пусть числовая функция $y = f(\bar{x}) : K \to \mathbf{R}$ непрерывна на компакте $K \subset \mathbf{R}^n$, тогда она ограничена на этом компакте и существуют точки $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in K$ такие, что*

$$f(\bar{x}_1) = M = \sup_K f(\bar{x}), \quad f(\bar{x}_2) = m = \inf_K f(\bar{x}).$$

Теорема Больцано – Коши. *Пусть числовая функция $y = f(\bar{x}) : L \to \mathbf{R}$ непрерывна на связном множестве $L \subset \mathbf{R}^n$, $f(\bar{x}_1) = a$, $f(\bar{x}_2) = b$, $a < b$, $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in L$, тогда $\forall c \in (a; b)$ существует $\bar{x}_3 \in L$ такая, что $f(\bar{x}_3) = c$.*

Наряду с понятием непрерывности по совокупности переменных рассматривают также непрерывность по отдельным переменным. Выделим одну из координат точки $\bar{a}$ с номером j, $1 \le j \le n$, положим у функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ все аргументы, кроме j-го, равными соответствующим координатам точки $\bar{a}$, тогда получим функцию одной переменной

$$\varphi(x_j) = f(a_1, \ldots, x_j, \ldots, a_n).$$

Определение. Функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *непрерывной по переменной x_j в точке $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$*, если соответствующая функция $\varphi(x_j)$ непрерывна в точке $x_j = a_j$.

Можно дать более общее определение *непрерывности по направлению*.

Определение. *Направлением* в $\mathbf{R}^n$ называется любой единичный вектор $\bar{e} \in \mathbf{R}^n$. Множество точек вида $\bar{x} = \bar{a}+t\bar{e}$ называется:

открытым лучом, выходящим из $\bar{a}$ в направлении $\bar{e}$, если $t > 0$;

замкнутым лучом, выходящим из $\bar{a}$ в направлении $\bar{e}$, если $t \geq 0$;

прямой, проходящей через точку $\bar{a}$ в направлении $\bar{e}$, если $t \in R$.

Рассмотрим функцию $\psi(t) = f(\bar{a} + t\bar{e})$.

Определение. Функция $y = f(\bar{x})$ называется *непрерывной в точке* $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$ *по направлению* $\bar{e}$, если функция $\psi(t)$ непрерывна в точке $t = 0$.

Замечание. Если функция $y = f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{a}$ по совокупности переменных, то функция $y = f(\bar{x})$ непрерывна в этой точке по любому из направлений. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно, что показывает следующий пример.

Пример 1. Функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \end{cases}$$

непрерывна в точке (0;0) отдельно по x и по y (как отношение двух многочленов, т. е. рациональная функция), но по совокупности переменных и по любому направлению (кроме двух) она разрывна в точке (0;0). Действительно, если устремить точку $(x;y)$ к точке (0;0) по прямой $y = kx$, $k \neq 0$, то

$$f(x,y)\Big|_{y=kx} = \frac{k}{1+k^2} \to \frac{k}{1+k^2} \neq 0 \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

т. е. функция разрывна по всем направлением, кроме (0;1) и (1;0).

Пример 2. Функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

непрерывна в точке (0;0) по всем направлениям. Действительно,

$$f(x,y)\Big|_{y=kx} = \frac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4} = \frac{k^2x}{1+k^4x^2} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Однако эта функция не является непрерывной по совокупности переменных. Рассмотрим значения функции $f(x,y)$ на семействе парабол $x = \alpha y^2$, $\alpha \neq 0$:

$$f(x,y)\Big|_{x=\alpha y^2} = \frac{\alpha y^4}{\alpha^2 y^4 + y^4} = \frac{\alpha}{\alpha^2+1} \to \frac{\alpha}{\alpha^2+1} \neq 0$$

$$\text{при} \quad x \to 0.$$

Рассмотрим теперь отображение более общего вида $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Такому отображению однозначно соответствует m функций $y_j = \varphi_j(\bar{x})$, $j = 1,\ldots,m$, представляющих собой координаты точки $\bar{y} = F(\bar{x})$.

Лемма. *Для непрерывности отображения $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ в точке $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы все координатные функции $y_j = \varphi_j(\bar{x})$ были бы непрерывны в точке $\bar{a}$.*

Доказательство. Если все координатные функции $y_j = \varphi_j(\bar{x})$ непрерывны в точке $\bar{a}$, то

$$\rho_{\mathbf{R}^m}(F(\bar{x}), F(\bar{a})) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (\varphi_j(\bar{x}) - \varphi_j(\bar{a}))^2} \to 0 \quad \text{при} \quad \bar{x} \to \bar{a},$$

т. е. $\bar{y} = F(\bar{x})$ непрерывно в точке $\bar{a}$.

Обратно. Если $\bar{y} = F(\bar{x})$ непрерывно в точке $\bar{a}$, то для любого $k = 1, \dots, m$

$$|\varphi_k(\bar{x}) - \varphi_k(\bar{a})| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (\varphi_j(\bar{x}) - \varphi_j(\bar{a}))^2} =$$

$$= \rho_{\mathbf{R}^m}(F(\bar{x}), F(\bar{a})) \to 0 \quad \text{при} \quad \bar{x} \to \bar{a},$$

т. е. все координатные функции $y_k = \varphi_k(\bar{x})$ непрерывны в точке $\bar{a}$. **Лемма доказана.**

Теорема (о непрерывности сложной функции). *Если отображение $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ непрерывно в точке $\bar{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, отображение $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ непрерывно в точке $\bar{y}_0 = f(\bar{x}_0)$, тогда функция $h(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$ непрерывна в точке $\bar{x}_0$.*

Определение. Числовая функция $f : A \to R$, $A \subset \mathbf{R}^n$, называется *равномерно непрерывной* на A, если $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta_\epsilon > 0$ такое, что $\forall \bar{x}, \bar{y} \in A$ таких, что $\rho_{\mathbf{R}^n}(\bar{x}, \bar{y}) < \delta_\epsilon$, справедливо неравенство

$$\rho_R(f(\bar{x}), f(\bar{y})) = |f(\bar{x}) - f(\bar{y})| < \epsilon.$$

Теорема Кантора. *Если функция $y = f(\bar{x})$ непрерывна на компакте $K \in \mathbf{R}^n$, то она равномерно непрерывна на этом компакте.*

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$ произвольное, так как $y = f(\bar{x})$ непрерывна в каждой точке компакта $K \in \mathbf{R}^n$, то для $\bar{x} \in K$ $\exists \delta_{\bar{x}} > 0$ такое, что $\forall \bar{y} : \rho(\bar{x}, \bar{y}) < \delta_{\bar{x}}$ справедливо неравенство $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| < \frac{\epsilon}{2}$. Семейство окрестностей $\left\{ \sigma_{\bar{x}}\left(\frac{\delta_{\bar{x}}}{2}\right) \right\}$ составляет открытое покрытие для K, значит из него можно выделить конечное подпокрытие $\left\{ \sigma_{\bar{x}_i}\left(\frac{\delta_{\bar{x}_i}}{2}\right) \right\}$, $i = 1, \dots, m$. Обозначим $\delta = \min\limits_{i=1,\dots,m} \frac{\delta_{\bar{x}_i}}{2}$, тогда для любой пары точек $\bar{x}, \bar{y} \in K$ таких, что $\rho(\bar{x}, \bar{y}) < \delta$, одна из них $\bar{x}$ попадает в какую-то из окрестностей $\sigma_{\bar{x}_j}\left(\frac{\delta_{\bar{x}_j}}{2}\right)$. Покажем, что точка $\bar{y}$ окажется в окрестности $\sigma_{\bar{x}_j}\left(\delta_{\bar{x}_j}\right)$. Действительно,

$$\rho(\bar{x}_j,\bar{y}) \le \rho(\bar{x}_j,\bar{x}) + \rho(\bar{x},\bar{y}) < \frac{\delta_{\bar{x}_j}}{2} + \delta \le \frac{\delta_{\bar{x}_j}}{2} + \frac{\delta_{\bar{x}_j}}{2} = \delta_{\bar{x}_j},$$

поэтому $|f(\bar{x}_j) - f(\bar{y})| < \frac{\epsilon}{2}$, а значит

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \le |f(\bar{x}) - f(\bar{x}_j)| + |f(\bar{x}_j) - f(\bar{y})| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

что и завершает доказательство. **Теорема Кантора доказана.**

Закончим этот параграф изучением свойств специальных непрерывных функций, называемых *квадратичными формами*. Такое название закреплено за функциями многих переменных вида

$$\Phi\left(\bar{h}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}h_ih_j.$$

Очевидно $\Phi\left(\bar{h}\right)$ непрерывна по совокупности переменных. Если $a_{ij} = a_{ji}$, то $\Phi\left(\bar{h}\right)$ называется *квадратичной формой с симметрической матрицей*. Квадратичная форма $\Phi\left(\bar{h}\right)$ называется *положительно* (*отрицательно*) *определенной*, если $\forall\bar{h} \in \mathbf{R}^n$, $\|\bar{h}\|_{\mathbf{R}^n} \neq 0$ выполняется неравенство $\Phi\left(\bar{h}\right) > 0$ ($\Phi\left(\bar{h}\right) < 0$), если при этом неравенства окажутся нестрогими, такую форму называют *положительно* (*отрицательно*) *полуопределенной*. Если же форма может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то такая форма называется *неопределенной*.

Лемма. *Если квадратичная форма $\Phi\left(\bar{h}\right)$ с симметрической матрицей положительно* (*отрицательно*) *определенная, то существует число $C > 0$* ($C < 0$) *такое, что*

$\forall \bar{h} \in \mathbf{R}^n$ выполняется неравенство $\Phi\left(\bar{h}\right) \geq C \cdot \|\bar{h}\|_{\mathbf{R}^n}$ (соответственно $\Phi\left(\bar{h}\right) \leq C \cdot \|\bar{h}\|_{\mathbf{R}^n}$).

Доказательство. Пусть $\Phi\left(\bar{h}\right)$ — положительно определенная квадратичная форма. Обозначим через $\|A\|$ симметрическую матрицу коэффициентов формы, тогда $\forall \bar{h} \in \mathbf{R}^n$, $\|\bar{h}\|_{\mathbf{R}^n} \neq 0$

$$\Phi\left(\bar{h}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}h_j\right)h_i = \sum_{i=1}^{n}\left(A\bar{h}\right)_i \cdot h_i = \left(A\bar{h}, \bar{h}\right) > 0.$$

Рассмотрим функцию $f\left(\bar{h}\right) = \left(A\bar{h}, \bar{h}\right)$ (непрерывную по совокупности переменных) на сфере единичного радиуса пространства $\mathbf{R}^n$, т. е. на множестве $\partial\sigma_{\bar{0}}(1) \equiv \{\bar{h} \in \mathbf{R}^n : \|\bar{h}\|_{\mathbf{R}^n} = 1\}$, которое является компактным множеством в $\mathbf{R}^n$, поэтому $f\left(\bar{h}\right)$ достигает на нем свое минимальное значение (по теореме Вейерштрасса) $C > 0$, т. е. $f\left(\bar{h}\right) \geq C > 0$ $\forall \bar{h} \in \partial\sigma_{\bar{0}}(1)$. Но тогда $\forall \bar{h} \in \mathbf{R}^n$, $\|\bar{h}\|_{\mathbf{R}^n} \neq 0$ вектор $\bar{y} = \dfrac{\bar{h}}{\|\bar{h}\|} \in \partial\sigma_{\bar{0}}(1)$, т. е.

$$f(\bar{y}) = (A\bar{y}, \bar{y}) = \left(A\frac{\bar{h}}{\|\bar{h}\|}, \frac{\bar{h}}{\|\bar{h}\|}\right) \geq C$$

или

$$\frac{1}{\|\bar{h}\|^2} \cdot \left(A\bar{h}, \bar{h}\right) \geq C,$$

$$\Phi\left(\bar{h}\right) = \left(A\bar{h}, \bar{h}\right) \geq C\|\bar{h}\|^2.$$

Лемма доказана.

Приведем здесь без доказательства критерий знакоопределенности квадратичных форм.

Теорема (критерий Сильвестра знакоопределенности симметрической квадратичной формы). *Пусть $\Phi\left(\bar{h}\right)$ — симметрическая квадратичная форма и $A_1, A_2, \ldots, A_n = \det\|A\|$ — главные миноры ее матрицы, тогда*

1) *квадратичная форма* $\Phi(\bar{h})$ *положительно определена тогда и только тогда, когда* $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $A_3 > 0, \ldots, A_n = \det\|A\| > 0$;

2) *квадратичная форма* $\Phi(\bar{h})$ *отрицательно определена тогда и только тогда, когда* $A_1 < 0$, $A_2 > 0$, $A_3 < 0$, $A_4 > 0, \ldots$ (*т. е. чередование знаков*).

8.2. Дифференцируемые функции многих переменных. Дифференцирование сложных функций

Рассмотрим числовую функцию $y = f(\bar{x})$, определенную в некоторой окрестности точки $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$. *Приращением* (*полным приращением*) *функции* $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$, соответствующим приращению аргумента $\Delta\bar{x} = \bar{x} - \bar{a}$, называется разность

$$\Delta f = f(\bar{x}) - f(\bar{a}) = f(\bar{a} + \Delta\bar{x}) - f(\bar{a}).$$

Замечание 1. Если функция $y = f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{a}$, то

$$\lim_{|\Delta\bar{x}|\to 0} |\Delta f| = \lim_{|\Delta\bar{x}|\to 0} |f(\bar{a} + \Delta\bar{x}) - f(\bar{a})| =$$

$$= \lim_{\rho_{\mathbf{R}^n}(\bar{x},\bar{a})\to 0} \rho_R(f(\bar{x}), f(\bar{a})) = 0,$$

т. е. $\Delta f = o(1)$ при $|\Delta\bar{x}| \to 0$.

Если приращение Δf функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ можно представить в виде суммы

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + o(|\Delta\bar{x}|),$$

где A_i — числа, то линейная функция приращений аргументов $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i$ называется *дифференциалом функции*

$y = f(\bar{x})$ *в точке* $\bar{a}$ и обозначается

$$dy \equiv df = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} A_i (x_i - a_i).$$

В частности, если $f(\bar{x}) = x_j$, то $df = \Delta x_j = dx_j$, откуда получаем общепринятое обозначение для дифференциала функции

$$df = \sum_{i=1}^{n} A_i dx_i.$$

Если у функции $y = f(\bar{x})$ существует в точке $\bar{a}$ дифференциал в указанном смысле (как линейная или главная часть приращение Δf функции в точке $\bar{a}$), то функцию $y = f(\bar{x})$ называют *дифференцируемой* в точке $\bar{a}$.

Замечание 2. Если функция $y = f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{a}$, то она непрерывна в этой точке. Действительно, в этом случае

$$\lim_{\Delta \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + \mathrm{o}\left(|\Delta \bar{x}|\right) \right) = 0,$$

что и означает непрерывность функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$.

Теорема (необходимое условие дифференцируемости функции многих переменных). *Если функция* $y = f(\bar{x})$ *дифференцируема в точке* $\bar{a}$, *то все функции* $\varphi_j(x_j) = f(a_1, \ldots, x_j, \ldots, a_n)$, $j = 1, \ldots, n$, *дифференцируемы в точках* a_j, *причем* $A_j = \varphi_j'(a_j)$.

Доказательство. Зафиксируем в выражении для полного приращения функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ значения независимых переменных $x_i = a_i$, $i \neq j$, тогда

$$\Delta f = f(\bar{a} + \Delta \bar{x}) - f(\bar{a}) = A_j \Delta x_j + \mathrm{o}\left(|\Delta x_j|\right),$$

так как $|\Delta \bar{x}| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} = |\Delta x_j|$. С другой стороны, в тех же предположениях

$$\Delta f = f(\bar{a} + \Delta \bar{x}) - f(\bar{a}) = \varphi_j(a_j + \Delta x_j) - \varphi_j(a_j),$$

т. е.

$$\varphi_j(a_j + \Delta x_j) - \varphi_j(a_j) = A_j \Delta x_j + \mathrm{o}\left(|\Delta x_j|\right),$$

что в соответствии с определением дифференцируемости функции одной переменной (см. § 4.1) означает равенство $A_j = \varphi_j'(a_j)$. **Теорема доказана.**

Производная функции $\varphi_j(x_j)$ в точке a_j, если она существует, называется *частной производной функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ по переменной x_j* и обозначается

$$\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_j} = \left.\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j}\right|_{\bar{x}=\bar{a}} = \varphi_j'(a_j) = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\varphi_j(a_j + \Delta x_j) - \varphi_j(a_j)}{\Delta x_j} =$$

$$= \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_j + \Delta x_j, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{\Delta x_j}.$$

В этом случае дифференциал функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ можно записать в виде

$$\left. df(\bar{x})\right|_{\bar{x}=\bar{a}} = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_n}\Delta x_n =$$

$$= \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_n}dx_n.$$

Таким образом, существование всех частных производных функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ является необходимым условием дифференцируемости в точке $\bar{a}$ самой функции.

Теорема (первое достаточное условие дифференцируемости функции многих переменных). *Пусть в некоторой окрестности точки $\bar{a}$ существуют все частные производные первого порядка функции $y = f(\bar{x})$ и эти частные производные непрерывны (по совокупности переменных) в точке $\bar{a}$, тогда сама функция $y = f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{a}$.*

Доказательство. Представим полное приращение функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ в следующем виде:

$$\Delta f = f(\bar{a} + \Delta\bar{x}) - f(\bar{a}) =$$

$$= f(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, \ldots, a_n) =$$
$$= (f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_n + \Delta x_n) -$$
$$- f(a_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_n + \Delta x_n)) +$$
$$+ (f(a_1, a_2 + \Delta x_2, a_3 + \Delta x_3, \ldots, a_n + \Delta x_n) -$$
$$- f(a_1, a_2, a_3 + \Delta x_3, \ldots, a_n + \Delta x_n)) + \ldots +$$
$$+ (f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)).$$

К каждой из выписанных разностей можно применить теорему Лагранжа о среднем (см. § 4.6), поскольку в рассматриваемой окрестности точки $\bar{a}$ функция $y = f(\bar{x})$ имеет непрерывные частные производные. Получим

$$\Delta f = \frac{\partial f(a_1 + \theta_1 \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_n + \Delta x_n)}{\partial x_1} \Delta x_1 +$$
$$+ \frac{\partial f(a_1, a_2 + \theta_2 \Delta x_2, \ldots, a_n + \Delta x_n)}{\partial x_1} \Delta x_2 + \ldots +$$
$$+ \frac{\partial f(a_1, a_2, \ldots, a_n + \theta_n \Delta x_n)}{\partial x_1} \Delta x_n,$$

где все $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$. Так как все частные производные непрерывны в точке $\bar{a}$, то

$$\lim_{|\Delta \bar{x}| \to 0} \frac{\partial f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + \theta_i \Delta x_i, \ldots, a_n + \Delta x_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i}.$$

Поэтому (по теореме о специальном представлении, см. § 3.5) для значений частных производных в промежуточных точках справедливо представление

$$\frac{\partial f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + \theta_i \Delta x_i, \ldots, a_n + \Delta x_n)}{\partial x_i} =$$
$$= \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} + \alpha_i(\Delta \bar{x}),$$

где $\lim\limits_{|\Delta\bar{x}|\to 0} \alpha_i(\Delta\bar{x}) = 0$. Следовательно,

$$\Delta f = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_n}\Delta x_n +$$

$$+ (\alpha_1(\Delta\bar{x})\Delta x_1 + \ldots + \alpha_n(\Delta\bar{x})\Delta x_n).$$

Поскольку в силу неравенства Коши – Буняковского для векторов

$$0 \le |\alpha_1(\Delta\bar{x})\Delta x_1 + \ldots + \alpha_n(\Delta\bar{x})\Delta x_n| = |(\bar{\alpha}(\Delta\bar{x}), \Delta\bar{x})| \le$$

$$\le \|\bar{\alpha}(\Delta\bar{x})\| \cdot \|\Delta\bar{x}\| =$$

$$= \sqrt{\alpha_1^2(\Delta\bar{x}) + \ldots + \alpha_n^2(\Delta\bar{x})} \cdot \sqrt{\Delta^2 x_1 + \ldots + \Delta^2 x_n} =$$

$$= \beta(\Delta\bar{x}) \cdot |\Delta\bar{x}| = \mathrm{o}\left(|\Delta\bar{x}|\right),$$

так как $\beta(\Delta\bar{x}) = \sqrt{\alpha_1^2(\Delta\bar{x}) + \ldots + \alpha_n^2(\Delta\bar{x})}$ — бесконечно малая при $|\Delta\bar{x}| \to 0$, как сумма конечного числа бесконечно малых. Из этих оценок вытекает окончательное представление для полного приращения функции $y = f(\bar{x})$ в окрестности точки $\bar{a}$

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i}\Delta x_i + \mathrm{o}\left(|\Delta\bar{x}|\right) = df(\bar{a}) + \mathrm{o}\left(|\Delta\bar{x}|\right).$$

Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x + 3y + \dfrac{4xy^3}{x^2+y^4}, & x^2 + y^4 \ne 0; \\ 0, & x^2 + y^4 = 0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна в точке (0;0). Действительно,

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x,y) = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \left(2x + 3y + \frac{4xy^3}{x^2+y^4}\right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \\ (x;y) \to (0;0) \Leftrightarrow \rho \to 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho \left(2\cos\varphi + 3\sin\varphi + \frac{4\rho\cos\varphi\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi + \rho^2\sin^4\varphi} \right) = 0 = f(0;0).$$

Частные производные у этой функции существуют как при $x^2 + y^4 \neq 0$, так и в точке (0;0) (по определению):

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\Delta x - 0}{\Delta x} = 2 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x},$$

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{3\Delta y - 0}{\Delta y} = 3 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}.$$

Исследуем теперь эту функцию на дифференцируемость в точке (0;0). Полное приращение имеет вид

$$f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = 2\Delta x + 3\Delta y + \frac{4\Delta x(\Delta y)^3}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^4},$$

линейная часть — $2\Delta x + 3\Delta y$, нелинейная часть (остаток)

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) = \frac{4\Delta x(\Delta y)^3}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^4}.$$

Проверим, удовлетворяет ли остаток $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ предельному равенству $\lim\limits_{|\Delta\bar{x}|\to 0} \dfrac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{|\Delta\bar{x}|} = 0$:

$$\frac{|\alpha(\Delta x, \Delta y)|}{|\Delta\bar{x}|} = \left. \frac{4\Delta x(\Delta y)^3}{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^4)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right|_{\Delta x = (\Delta y)^2} =$$

$$= \frac{4(\Delta y)^5}{2(\Delta y)^4|\Delta y|\sqrt{1 + (\Delta y)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + (\Delta y)^2}} \xrightarrow{\Delta y\to 0} 2 \neq 0.$$

Следовательно, функция не дифференцируема в точке (0;0).

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Эта функция непрерывна в точке (0;0). В этой точке у нее существуют первые частные производные по обеим переменным, что видно из следующих вычислений:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3}}{\Delta x}=1=\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}.$$

Исследуем на дифференцируемость. Полное приращение

$$\Delta f=\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}$$

не содержит линейных слагаемых вообще. Проверим, существует ли предел $\lim\limits_{|\Delta\bar{x}|\to 0}\dfrac{\Delta f}{|\Delta\bar{x}|}$:

$$\frac{\Delta f}{|\Delta\bar{x}|}=\left.\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|_{\Delta y=k\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{1+k^3}}{\sqrt{1+k^2}}\xrightarrow{\Delta x\to 0} l\neq 0.$$

Функция не дифференцируема в точке (0;0).

Теорема (дифференцирование сложной функции). *Пусть отображение* $\varphi(\bar{x})=(\varphi_1(\bar{x}),\ldots,\varphi_m(\bar{x})):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ *определено в некоторой* δ*-окрестности точки* $\bar{a}\in\mathbf{R}^n$ $\sigma_{\bar{a}}(\delta)$, *причем образ этой* δ*-окрестности* $\varphi(\sigma_{\bar{a}}(\delta))$ *вложен в* ϵ*-окрестность* $\sigma_{\bar{b}}(\epsilon)$ *точки* $\bar{b}\in\mathbf{R}^m$, $\bar{b}=\varphi(\bar{a})$ *и все координатные функции* $y_i=\varphi_i(\bar{x})$, $i=1,\ldots,m$, *дифференцируемы в точке* $\bar{a}$. *Пусть в* ϵ*-окрестности точки* $\bar{b}$ *определена числовая функция* $z=f(\bar{y})$, *которая дифференцируема в точке* $\bar{b}$, *тогда сложная функция* $z=h(\bar{x})=f(\varphi(\bar{x}))$ *дифференцируема в точке* $\bar{a}$, *причем справедливы равенства*

$$\frac{\partial h(\bar{a})}{\partial x_j}=\frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1(\bar{a})}{\partial x_j}+\ldots+\frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial\varphi_m(\bar{a})}{\partial x_j},\ j=1,\ldots,n.$$

Доказательство. Придадим аргументу $\bar{x}$ в точке $\bar{a}$ приращение $\Delta\bar{x}$. Этому приращению соответствуют приращения Δy_i координатных функций $y_i=\varphi_i(\bar{x})$, $i=1,\ldots,m$, в точке $\bar{a}$. Вектору приращений $\Delta\bar{y} = (\Delta y_1, \ldots, \Delta y_m)$ в свою очередь соответствует приращение Δf функции $z = f(\bar{y})$ в точке $\bar{b}$. Поскольку функция $z = f(\bar{y})$ дифференцируема в точке $\bar{b}$, то ее полное приращение Δf можно записать в виде

$$\Delta f = \frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_1}\Delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_m}\Delta y_m + \mathrm{o}\left(|\Delta\bar{y}|\right).$$

В силу дифференцируемости координатных функций $y_i = \varphi_i(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, m$, в точке $\bar{a}$ приращения Δy_i можно записать в следующем виде:

$$\Delta y_i = \frac{\partial\varphi_i(\bar{a})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi_i(\bar{a})}{\partial x_n}\Delta x_n + \mathrm{o}\left(|\Delta\bar{x}|\right).$$

Подставим выражения для Δy_i в представление для Δf и приведем подобные слагаемые относительно Δx_i, получим

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_i}\Delta y_i + \mathrm{o}\left(\sqrt{(\Delta y_1)^2 + \ldots + (\Delta y_m)^2}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_i}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i(\bar{a})}{\partial x_j}\Delta x_j\right) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_i}\cdot \mathrm{o}\left(|\Delta\bar{x}|\right) +$$

$$+ \mathrm{o}\left(\sqrt{(\Delta y_1)^2 + \ldots + (\Delta y_m)^2}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial\varphi_i(\bar{a})}{\partial x_j}\right)\Delta x_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_i}\cdot \mathrm{o}\left(|\Delta\bar{x}|\right) +$$

$$+ \mathrm{o}\left(\sqrt{(\Delta y_1)^2 + \ldots + (\Delta y_m)^2}\right).$$

Поскольку $\dfrac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_i}$ — некоторые числа, то в силу свойств о-малых

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_i}\cdot \mathrm{o}\left(|\Delta\bar{x}|\right) = \mathrm{o}\left(|\Delta\bar{x}|\right).$$

Далее для величин Δy_i в силу неравенства Коши – Буняковского для векторов справедлива оценка

$$0 \le |\Delta y_i| \le \left| \frac{\partial \varphi_i(\bar a)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i(\bar a)}{\partial x_n} \Delta x_n \right| + |\mathrm{o}\,(|\Delta \bar x|)| \le$$

$$\le \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_i(\bar a)}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \varphi_i(\bar a)}{\partial x_n}\right)^2} \times$$

$$\times \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2} + |\mathrm{o}\,(|\Delta \bar x|)| =$$

$$= K_i |\Delta \bar x| + |\beta_i(|\Delta \bar x|)| \cdot |\Delta \bar x| = \big(K_i + \big|\beta_i(|\Delta \bar x|)\big|\big) |\Delta \bar x|,$$

здесь $\beta_i(|\Delta \bar x|)$ — бесконечно малая при $|\Delta \bar x| \to 0$. Поэтому

$$0 \le (\Delta y_i)^2 \le \big(K_i + \big|\beta_i(|\Delta \bar x|)\big|\big)^2 |\Delta \bar x|^2,$$

тогда

$$0 \le \sqrt{(\Delta y_1)^2 + \ldots + (\Delta y_m)^2} \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \big(K_i + \big|\beta_i(|\Delta \bar x|)\big|\big)^2} \cdot |\Delta \bar x|,$$

и значит

$$\mathrm{o}\left(\sqrt{(\Delta y_1)^2 + \ldots + (\Delta y_m)^2}\right) = \mathrm{o}\,(|\Delta \bar x|).$$

Таким образом, приращение Δf приведено к виду

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\bar b)}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i(\bar a)}{\partial x_j} \right) \Delta x_j + \mathrm{o}\,(|\Delta \bar x|),$$

что и завершает доказательство теоремы, так как такое представление означает дифференцируемость сложной функции $z = h(\bar x) = f(\varphi(\bar x))$, а выражения $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\bar b)}{\partial y_i} \cdot$ $\cdot \frac{\partial \varphi_i(\bar a)}{\partial x_j}$ являются частными производными сложной функции по x_j. **Теорема доказана.**

Замечание (инвариантность формы первого дифференциала). Если в выражении для первого дифференциала функции $z = f(\bar{y})$ $dz = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i$ вместо дифференциалов dy_i подставить дифференциалы функций $y_i = \varphi_i(\bar{x})$ $dy_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j$, то получим выражение

$$dz = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right) dx_j,$$

представляющее дифференциал сложной функции $z = f(g(\bar{x}))$, т. е. форма первого дифференциала не изменилась при замене независимых переменных зависимыми.

Теорема (правила дифференцирования). *Справедливы следующие формулы:*

$$d(cu) = cdu \ \ \forall c \in R; \quad d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$d(uv) = vdu + udv; \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся свойством инвариантности первого дифференциала. Проверим справедливость последнего равенства. Пусть $z = \frac{u}{v}$, где u и v — независимые переменные, тогда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \frac{1}{v} du - \frac{u}{v^2} dv = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

В силу инвариантности формы первого дифференциала выражение для dz будет дифференциалом для $\frac{u}{v}$ и в случае, если u и v сами будут дифференцируемыми функциями других переменных. **Теорема доказана.**

8.3. Производная по направлению. Градиент. Элементы дифференциальной геометрии

Производная по направлению. Градиент. Пусть в $\mathbf{R}^n$ задано некоторое направление $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_n)$, $|\bar{l}| = 1$, $\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n$ — единичные векторы (орты) осей координат $Ox_1, \ldots, Ox_n$, тогда если α_i — угол между векторами $\bar{l}$ и $\bar{k}_i$, то $l_i = (\bar{l}, \bar{k}_i) = |\bar{l}| \cdot |\bar{k}_i| \cdot \cos\alpha_i = \cos\alpha_i$. Поэтому числа $l_i = \cos\alpha_i$ принято называть *направляющими косинусами* вектора (направления) $\bar{l}$.

Пусть числовая функция $y = f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{a}$, рассмотрим сложную функцию $h(t) = f(\bar{a}+t\bar{l})$ одной переменной t. По теореме о дифференцировании сложной функции из предыдущего параграфа для производной функции $h(t)$ в точке $t = 0$ справедливо равенство

$$h'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i(0)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} \cdot \cos\alpha_i,$$

так как здесь $x_i = a_i + t\cos\alpha_i$.

Определение. Величину $h'(0)$ принято называть *производной по направлению $\bar{l}$ функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$* и обозначать $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{l}} = h'(0)$.

Определение. Вектор вида $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ называют *градиентом функции $y = f(\bar{x})$* и обозначают

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Таким образом, для производной по направлению $\bar{l}$ получаем следующее представление:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}} = (\operatorname{grad} f, \bar{l}) = (\nabla f, \bar{l}).$$

Формальный символ $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$ называют оператором «набла».

Из неравенства Коши – Буняковского для векторов вытекает оценка для модуля производной по направлению

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}\right| \le \left\|\bar{l}\right\|_{\mathbf{R}^n} \cdot \|\mathrm{grad}\, f\|_{\mathbf{R}^n} = \left|\bar{l}\right| \cdot |\mathrm{grad}\, f| = |\mathrm{grad}\, f|,$$

причем неравенство обратится в равенство, если векторы $\bar{l}$ и $\mathrm{grad}\, f$ окажутся коллинеарными. Отсюда вытекают следующие естественные свойства производной по направлению:

1. Производная функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ по направлению, определяемому $\mathrm{grad}\, f$ (в этой точке), является максимальной по сравнению с производной в точке $\bar{a}$ по любому другому направлению и равна $|\mathrm{grad}\, f|$, т. е. длине вектора $\mathrm{grad}\, f$ в точке $\bar{a}$ (направление наибольшего возрастания функции).

2. Минимальное значение производной функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ по направлению равно $-|\mathrm{grad}\, f|$ и достигается при дифференцировании по направлению, противоположному к направлению вектора $\mathrm{grad}\, f$ (направление наибольшего убывания функции).

3. Производная функции $y = f(\bar{x})$ по направлению $\bar{l}$ в точке $\bar{a}$ равна нулю, если в этой точке $\mathrm{grad}\, f = 0$ или $\bar{l} \perp \mathrm{grad}\, f$.

Геометрический смысл дифференциала. Касательные и нормальный векторы поверхности. В этом пункте будем рассматривать функции, зависящие от двух переменных. Поверхностью P в пространстве $\mathbf{R}^3$ называется *график всякой непрерывной функции* $z = f(x, y)$, заданной в некоторой области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ (область — связное открытое множество), т. е. поверхность P — это множество точек в $\mathbf{R}^3$ с координатами $(x; y; z) \equiv (x; y; f(x, y))$, где $(x; y) \in \Omega$. Две поверхности $z = f_1(x, y)$ и $z = f_2(x, y)$ называются *касающимися* друг друга в точке $(x_0; y_0; z_0)$, если $z_0 = f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0)$ и $r(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y) = = o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right)$ при $(x; y) \to (x_0; y_0)$. Как известно, графиком линейной функции $z = kx + ly + m$, где $k, l, m \in R$, является плоскость в $\mathbf{R}^3$.

Теорема (геометрический смысл дифференциала). *Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в ϵ-окрестности точки $\bar{a} = (x_0; y_0)$, дифференцируема в этой точке, $z_0 = f(x_0, y_0)$, тогда плоскость π, заданная уравнением вида*

$$z - z_0 = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial y}(y - y_0),$$

касается поверхности $P: z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0).

Доказательство. Уравнение плоскости π перепишем в виде

$$z = g(x, y) = z_0 + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial y}\Delta y,$$

здесь $\dfrac{\partial f(\bar{a})}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(\bar{a})}{\partial y}\Delta y$ — линейная часть по Δx и Δy, т. е. дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке $\bar{a} = (x_0; y_0)$. Поскольку функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $\bar{a} = (x_0; y_0)$, то

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial y}\Delta y + $$
$$+ o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right),$$

поэтому

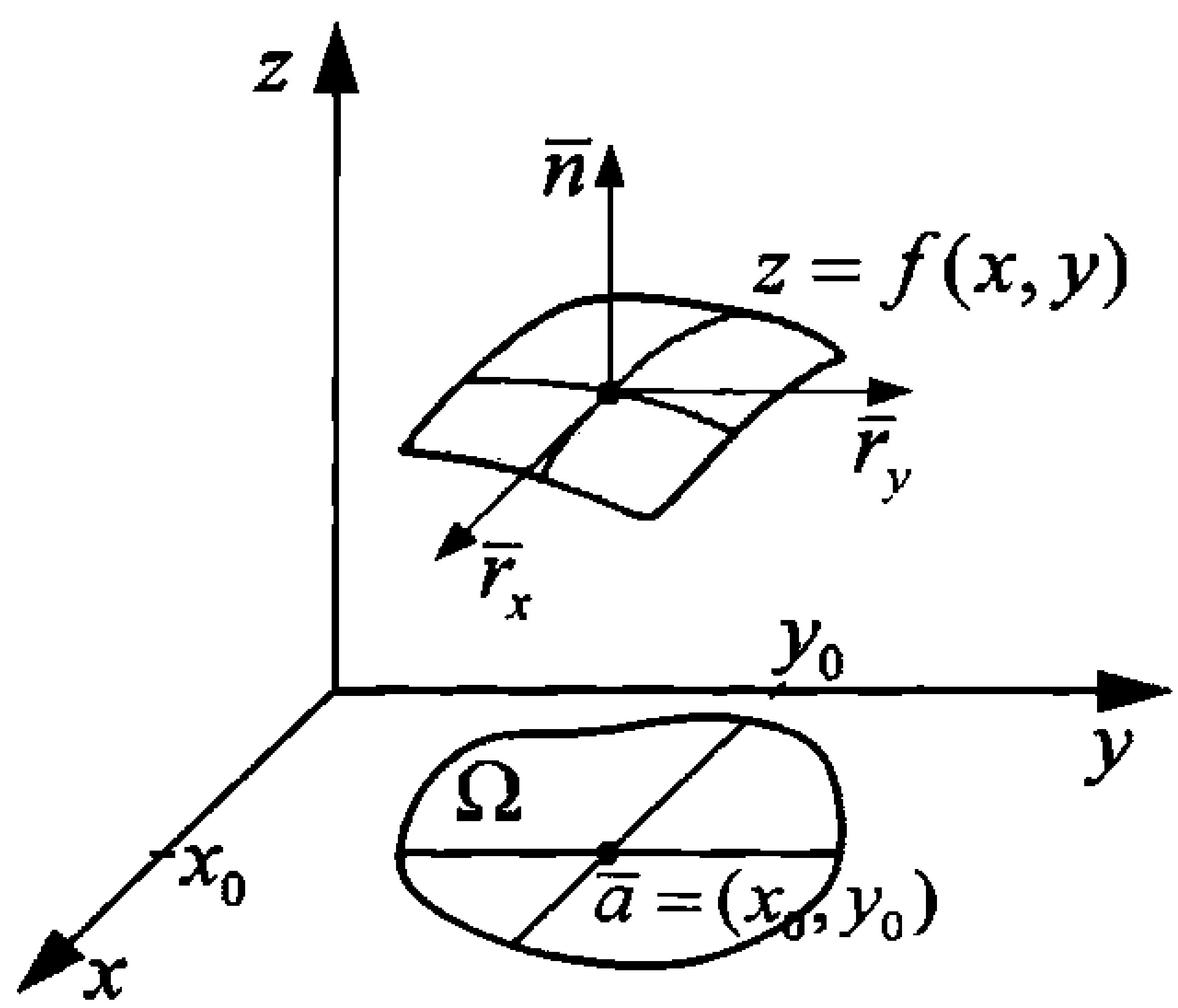
$$f(x, y) - g(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial y}\Delta y +$$
$$+ o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) - z_0 - \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial y}\Delta y =$$

$$= o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right).$$

Полученное равенство в соответствии с определением касания поверхностей и означает утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

Пусть в $\mathbf{R}^3$ задана поверхность

$$z = f(x, y), \quad (x; y) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2.$$



Рассмотрим на этой поверхности семейства *координатных линий* вида: $(x; y_0; f(x, y_0)), (x; y_0) \in \Omega$, y_0 — фиксировано и $(x_0; y; f(x_0, y)), (x_0; y) \in \Omega$, x_0 — фиксировано. Тогда вектора $\bar{r}_x = \left(1; 0; \dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\bar{r}_y = \left(0; 1; \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ являются касательными к этим координатным линиям. Вектор $\bar{n} = \bar{r}_x \times \bar{r}_y$ называется *нормальным вектором* к поверхности $P : z = f(x, y)$. Найдем координаты этого вектора

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}; -\frac{\partial f}{\partial y}; 1\right).$$

Очевидно этот же вектор является нормальным и к касательной плоскости π

$$-\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x}(x-x_0)-\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial y}(y-y_0)+z-z_0=0.$$

Прямую, проходящую через точку $(x_0; y_0; z_0)$ параллельно нормальному вектору $\bar{n}$, называют *нормалью к поверхности* $P:\ z=f(x,y)$ в точке $(x_0; y_0; z_0)$.

8.4. Частные производные высших порядков

Пусть числовая функция $y=f(\bar{x})$ имеет в некоторой ϵ-окрестности $\sigma_{\bar{a}}(\epsilon)$ точки $\bar{a}$ все первые частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1,\ldots,n$. Эти частные производные сами являются функциями n независимых переменных, поэтому могут иметь в точке $\bar{a}$ частные производные $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, $i,j=1,\ldots,n$, которые называются *вторыми частными производными* исходной функции $y=f(\bar{x})$ и обозначаются $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, если $i\neq j$, их называют *смешанными производными*. Естественно, возникает вопрос о совпадении двух смешанных частных производных $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$, т. е. вопрос о том, на сколько существен порядок дифференцирования. Следующий пример показывает, что в общем случае порядок дифференцирования весьма важен.

Пример. Рассмотрим функцию двух переменных

$$z=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0; \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ этой функции в точке (0;0):

$$\frac{\partial z(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(\Delta x, 0) - z(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial z(0,0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(0, \Delta y) - z(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{x(x^4 - y^4 - 4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial y \partial x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial z(0,\Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial z(0,0)}{\partial x}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\frac{(\Delta y)^5}{(\Delta y)^4}}{\Delta y} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x \partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial z(\Delta x,0)}{\partial y} - \frac{\partial z(0,0)}{\partial y}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(\Delta x)^5}{(\Delta x)^4}}{\Delta x} = 1,$$

итак, $\dfrac{\partial^2 z(0,0)}{\partial y \partial x} \neq \dfrac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x \partial y}$.

Таким образом, возникает вопрос о достаточных условиях, при которых смешанные частные производные совпадают, т. е. когда результат вычисления смешанных частных производных не зависит от порядка дифференцирования. Такие достаточные условия приведены в следующих двух теоремах Шварца и Юнга.

Теорема Шварца. *Пусть функция $y = f(\bar{x})$ имеет в некоторой ϵ-окрестности $\sigma_{\bar{a}}(\epsilon)$ точки $\bar{a}$ смешанные частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, причем они непрерывны в точке $\bar{a}$, тогда $\frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_j \partial x_i}$.*

Доказательство. Рассмотрим пару функций

$$\varphi(x_i) = f(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n) - $$
$$- f(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n),$$
$$\phi(x_j) = f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, x_j, \ldots, a_n) - $$
$$- f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, x_j, \ldots, a_n).$$

Запишем приращения для этих функций

$$\Delta\varphi = \varphi(a_i + h) - \varphi(a_i) =$$
$$= f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n) -$$
$$- f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_j, \ldots, a_n) -$$
$$- f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n) +$$
$$+ f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n),$$
$$\Delta\phi = \phi(a_j + h) - \phi(a_j) =$$
$$= f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n) -$$
$$- f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n) -$$
$$- f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_j, \ldots, a_n) +$$
$$+ f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n),$$

т. е. $\Delta\varphi = \Delta\phi$.

По теореме Лагранжа о среднем для приращения функции $\Delta\varphi$ имеем

$$\Delta\varphi = \varphi'(a_i + \theta_1 h)h =$$
$$= \left(\frac{\partial f(a_1, \ldots, a_i + \theta_1 h, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n)}{\partial x_i} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_i + \theta_1 h, \ldots, a_j, \ldots, a_n)}{\partial x_i}\right) h =$$
$$= \frac{\partial^2 f(a_1, \ldots, a_i + \theta_1 h, \ldots, a_j + \theta_2 h, \ldots, a_n)}{\partial x_j \partial x_i} h^2,$$

$$0 < \theta_1, \quad \theta_2 < 1.$$

Аналогично для приращения функции ϕ справедливо представление

$$\Delta\phi = \phi'(a_j + \theta_3 h)h =$$

$$= \frac{\partial^2 f(a_1, \ldots, a_i + \theta_4 h, \ldots, a_j + \theta_3 h, \ldots, a_n)}{\partial x_i \partial x_j} h^2,$$

$$0 < \theta_3, \quad \theta_4 < 1.$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{\partial^2 f(a_1, \ldots, a_i + \theta_1 h, \ldots, a_j + \theta_2 h, \ldots, a_n)}{\partial x_j \partial x_i} =$$

$$= \frac{\partial^2 f(a_1, \ldots, a_i + \theta_4 h, \ldots, a_j + \theta_3 h, \ldots, a_n)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $h \to 0$, в силу непрерывности вторых смешанных частных производных получаем требуемое равенство. **Теорема Шварца доказана.**

Теорема Юнга. *Пусть функция $y = f(\bar{x})$ имеет в некоторой ϵ-окрестности $\sigma_{\bar{a}}(\epsilon)$ точки $\bar{a}$ первые частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, дифференцируемые в самой точке $\bar{a}$, тогда $\frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_j \partial x_i}$.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы Шварца, введем в рассмотрение пару функций $\varphi(x_i)$ и $\phi(x_j)$, тогда по теореме Лагранжа о среднем

$$\Delta\varphi = \varphi'(a_i + \theta_1 h)h =$$

$$= \left(\frac{\partial f(a_1, \ldots, a_i + \theta_1 h, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n)}{\partial x_i} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_i + \theta_1 h, \ldots, a_j, \ldots, a_n)}{\partial x_i} \right) h =$$

$$= \left(\left(\frac{\partial f(a_1, \ldots, a_i + \theta_1 h, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n)}{\partial x_i} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n)}{\partial x_i}\right) -$$

$$- \left(\frac{\partial f(a_1, \ldots, a_i + \theta_1 h, \ldots, a_j, \ldots, a_n)}{\partial x_i} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n)}{\partial x_i}\right)\right) h.$$

В силу дифференцируемости функции $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ в точке $\bar{a}$ для приращения $\Delta\varphi$ получаем представление

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i^2}\theta_1 h + \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_j \partial x_i} h + \mathrm{o}\left(\sqrt{(\theta_1 h)^2 + h^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i^2}\theta_1 h + \mathrm{o}\left(|h|\right)\right) h = \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_j \partial x_i} h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right).$$

Рассуждая аналогично для приращения $\Delta\phi$, находим представление

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right).$$

Из равенства $\Delta\varphi = \Delta\phi$ получаем

$$\frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_j \partial x_i} h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right) = \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right)$$

или

$$\frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_j \partial x_i} + \mathrm{o}\left(1\right) = \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} + \mathrm{o}\left(1\right).$$

Отсюда после предельного перехода при $h \to 0$ получаем утверждение теоремы. **Теорема Юнга доказана.**

Определение. Функция $y = f(\bar{x})$ называется *k раз дифференцируемой* в точке $\bar{a}$, если все ее частные производные $(k-1)$-го порядка дифференцируемы в этой точке.

Теорема (второе достаточное условие дифференцируемости). *Для того чтобы функция $y = f(\bar{x})$ была k раз дифференцируемой в точке $\bar{a}$, достаточно, чтобы все ее частные производные до порядка k включительно были непрерывны в этой точке.*

Справедливость этого утверждения вытекает из определения дифференцируемости функции многих переменных и первого достаточного условия дифференцируемости (см. § 8.2) с последующей индукцией по k.

Следствие (из теоремы Юнга). *Если функция $y = f(\bar{x})$ k раз дифференцируема в точке $\bar{a}$, то смешанные частные производные до порядка k включительно не зависят от порядка дифференцирования.*

Доказательство проводится индукцией по k.

8.5. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных

Пусть функция $y = f(\bar{x})$ дважды дифференцируема в точке $\bar{a}$, $\bar{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ — вектор приращений аргумента в точке $\bar{a}$, тогда для дифференциала функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ имеем представление

$$df(\bar{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} h_i.$$

Рассмотрим функцию

$$g(\bar{x}) = df(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} h_i.$$

Эта функция дифференцируема в точке $\bar{a}$, поэтому ее дифференциал в этой точке, соответствующий вектору приращений $\bar{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, имеет вид

$$dg(\bar{a}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} h_i \right) \Bigg|_{\bar{x}=\bar{a}} h_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j.$$

Полученное таким образом выражение называется вторым дифференциалом функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ и обозначается $d^2 f(\bar{a}) \equiv dg(\bar{a})$. Далее вновь можно ввести функцию вида

$$g(\bar{x}) = d^2 f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

и при выполнении соответствующих условий ввести понятие третьего дифференциала функции $y = f(\bar{x})$ и т. д. Поскольку для независимых переменных приращения совпадают с дифференциалами $h_i = dx_i$, то выражение для второго дифференциала $d^2 f$ и т. д. приобретают следующий вид (общепринятую форму записи):

$$d^2 f(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i\, dx_j,$$

$$d^k f(\bar{x}) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(\bar{x})}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}.$$

Символически это записывают еще и так:

$$d^k f(\bar{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i \right)^k f(\bar{x}).$$

Замечание 1. Как и для функций одной переменной, дифференциалы второго и последующих порядков не обладают свойством инвариантности. Действительно, если $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{t})$, то (см. замечание об инвариантности формы первого дифференциала из § 8.2)

$$df(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}\, dx_i,$$

$$df(\bar{\varphi}(\bar{t})) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{\varphi}(\bar{t}))}{\partial x_i}\, d\varphi_i(\bar{t}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar\varphi(\bar t))}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i(\bar t))}{\partial t_j}\, dt_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar\varphi(\bar t))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i(\bar t))}{\partial t_j} \right) dt_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar\varphi(\bar t))}{\partial t_j}\, dt_j.$$

Отсюда, в соответствии с правилами вычисления дифференциалов (см. § 8.2),

$$d^2 f(\bar\varphi(\bar t)) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ d\left(\frac{\partial f(\bar\varphi(\bar t))}{\partial x_i} \right) d\varphi_i(\bar t) + \frac{\partial f(\bar\varphi(\bar t))}{\partial x_i} d^2\varphi_i(\bar t) \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar\varphi(\bar t))}{\partial x_j \partial x_i} d\varphi_j(\bar t) \right) d\varphi_i(\bar t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar\varphi(\bar t))}{\partial x_i}\, d^2\varphi_i(\bar t),$$

т. е.

$$d^2 f(\bar\varphi(\bar t)) \neq \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \Bigg|_{\bar x = \bar\varphi(\bar t)}.$$

Отметим, что в развернутом виде $d^2 f(\bar\varphi(\bar t))$ выглядит следующим образом:

$$d^2 f(\bar\varphi(\bar t)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_k} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar\varphi(\bar t))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i(\bar t))}{\partial t_j} \right) dt_j \right) dt_k =$$

$$= \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar\varphi(\bar t))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i(\bar t))}{\partial t_j} \right) dt_j\, dt_k.$$

Замечание 2. Если функция $\bar x = \bar\varphi(\bar t)$ линейна по $\bar t$, т. е.

$$x_i = \varphi_i(\bar t) = x_{i0} + x_{i1}t_1 + \ldots + x_{in}t_n,$$

то $d^2\varphi_i(\bar t) \equiv 0$ и тогда инвариантность формы второго и последующих дифференциалов обеспечена. Соответственно, если $\bar x = \bar a + t\bar e$, где $\bar e$ — некоторое направление в $\mathbf{R}^n$, $t \in R$, то в силу линейности такой функции (а значит, и инвариантности формы дифференциала) для сложной функции (одной переменной) $g(t) = f(\bar{a} + t\bar{e})$ имеем

$$d^k f(\bar{a} + t\bar{e})\Big|_{t=0} = d^k g(t)\Big|_{t=0} = g^{(k)}(0)(dt)^k.$$

Замечание 3. При проведении вычислений иногда требуется полная расшифровка выражения для $d^k f(\bar{x})$, которая выглядит следующим образом (для k раз дифференцируемой функции):

$$d^k f(\bar{x}) = \sum_{i_1+\ldots+i_n=k,\, 0\le i_j\le k} \frac{(i_1+i_2+\ldots+i_n)!}{i_1!\cdot i_2!\cdot\ldots\cdot i_n!}\times$$

$$\times\frac{\partial^k f(\bar{x})}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\ldots\partial x_n^{i_n}}(dx_1)^{i_1}(dx_2)^{i_2}\ldots(dx_n)^{i_n}$$

и доказывается индукцией по k.

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть функция $y = f(\bar{x})$ k раз дифференцируема в точке $\bar{a}$, тогда при $\bar{x} \to \bar{a}$ справедливо представление*

$$f(\bar{x}) = P(\bar{x}) + o\left(|\bar{x} - \bar{a}|^k\right),$$

где

$$P(\bar{x}) = f(\bar{a}) + df(\bar{a})\Big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}} + \frac{1}{2!}d^2 f(\bar{a})\Big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}} +$$

$$+\ldots+\frac{1}{k!}d^k f(\bar{a})\Big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}}$$

или в развернутом виде

$$P(\bar{x}) = f(\bar{a}) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i}(x_i - a_i) +$$

$$+\sum_{l=2}^{k} \sum_{i_1+\ldots+i_n=l,\, 0\le i_j\le l} \frac{1}{i_1!\cdot\ldots\cdot i_n!}\times$$
$$\times\frac{\partial^l f(\bar{a})}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}}(x_1-a_1)^{i_1}\ldots(x_n-a_n)^{i_n}.$$

Доказательство. При $k = 1$ утверждение теоремы представляет собой определение дифференцируемости функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$. Покажем справедливость теоремы при $k > 1$. Рассмотрим функцию $r(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P(\bar{x})$, очевидно $r(\bar{a}) = \dfrac{\partial^l r(\bar{a})}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}} = 0$ при $1 \le l \le k$, $i_1+\ldots+ +i_n = l$. Теорема будет доказана, если показать справедливость равенства $r(\bar{x}) = o\left(|\bar{x}-\bar{a}|^k\right)$ при $\bar{x}\to\bar{a}$, которое докажем методом математической индукции по k. При $k = 1$ утверждение справедливо в силу предыдущего замечания. Предположим, что при $k \le m-1$ для функции $r(\bar{x})$ из равенств $r(\bar{a}) = \dfrac{\partial^l r(\bar{a})}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}} = 0$ при $1 \le l \le k$, $i_1+\ldots+i_n = l$ следует представление $r(\bar{x}) = = o\left(|\bar{x}-\bar{a}|^k\right)$ при $\bar{x}\to\bar{a}$. Пусть теперь выполнены условия $r(\bar{a}) = \dfrac{\partial^l r(\bar{a})}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}} = 0$ при $1 \le l \le m$, $i_1+\ldots+i_n = l$, тогда

$$r(\bar{x}) = r(\bar{x}) - r(\bar{a}) =$$
$$= r(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2, \ldots, a_{n-1}+\Delta x_{n-1}; a_n+\Delta x_n) -$$
$$- r(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}; a_n) =$$
$$= \Big(r(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2, \ldots; a_{n-1}+\Delta x_{n-1}, a_n+\Delta x_n) -$$
$$- r(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2, \ldots, a_{n-1}+\Delta x_{n-1}, a_n)\Big)+$$
$$+\Big(r(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2, \ldots, a_{n-1}+\Delta x_{n-1}, a_n) -$$
$$- r(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)\Big)+\ldots+$$

$$+\Big(r(a_1+\Delta x_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) - r(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)\Big).$$

К каждому из слагаемых можно применить теорему Лагранжа (см. § 4.6) о среднем (по *одной* из переменных, так как в силу дифференцируемости в точке $\bar{a}$ в окрестности этой точки определены соответствующие частные производные и мы имеем дело с непрерывностью и дифференцируемостью по каждой из переменных в отдельности), поэтому

$$r(\bar{x}) =$$

$$= \frac{\partial r(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2, \ldots, a_{n-1}+\Delta x_{n-1}, a_n+\theta_n \Delta x_n)}{\partial x_n}\Delta x_n +$$

$$+\frac{\partial r(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2, \ldots, a_{n-1}+\theta_{n-1}\Delta x_{n-1}, a_n)}{\partial x_{n-1}}\Delta x_{n-1}+$$

$$+\ldots+\frac{\partial r(a_1+\theta_1\Delta x_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)}{\partial x_{n-1}}\Delta x_1.$$

Однако каждая из частных производных, фигурирующих в этом разложении, удовлетворяет предположению индукции, поэтому при $\bar{x} \to \bar{a}$

$$0 \le |r(\bar{x})| \le \left|\mathrm{o}\left(|\bar{x}-\bar{a}|^{m-1}\right)\right| \Big(|\Delta x_n| + |\Delta x_{n-1}| + \ldots + |\Delta x_1|\Big) \le$$

$$\le \left|\mathrm{o}\left(|\bar{x}-\bar{a}|^{m-1}\right)\right| \cdot n \cdot |\bar{x}-\bar{a}| = \mathrm{o}\left(|\bar{x}-\bar{a}|^{m}\right),$$

т. е. $r(\bar{x}) = \mathrm{o}\left(|\bar{x}-\bar{a}|^m\right)$. **Теорема доказана.**

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть числовая функция $y = f(\bar{x})$ в любой точке $\bar{x} \in \sigma_{\bar{a}}(\epsilon)$ некоторой ϵ-окрестности точки $\bar{a}$ $k+1$ раз дифференцируема, тогда $\forall \bar{x} \in \sigma_{\bar{a}}(\epsilon)$ существует точка $\bar{c} = \bar{a} + \theta(\bar{x}-\bar{a})$, $0 < \theta < 1$ (принадлежащая отрезку с концами в точках $\bar{a}$ и $\bar{x}$), такая что*

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + \sum_{j=1}^{k} \left.\frac{d^j f(\bar{a})}{j!}\right|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}} + \left.\frac{d^{k+1} f(\bar{c})}{(k+1)!}\right|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(t) = f(\bar{a} + t(\bar{x} - \bar{a}))$, $t \in [0; 1]$, тогда по формуле Тейлора для функции одной переменной (см. § 4.11) с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$g(t) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}t + \ldots + \frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^k + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}g^{(k+1)}(\theta),$$

здесь $0 < \theta < t < 1$, тогда

$$g(1) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} + \ldots + \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}.$$

Отсюда по правилу дифференцирования сложной функции (см. § 8.2)

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i}(x_i - a_i)}_{\frac{1}{1!}df(\bar{a})\big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}}} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{k!}d^k f(\bar{a})\Big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}} + \frac{1}{(k+1)!}d^{k+1}f(\bar{c})\Big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}}.$$

Теорема доказана.

8.6. Локальный экстремум функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума

Определение. Точка $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$ называется точкой *строгого локального максимума* функции $y = f(\bar{x})$, если существует некоторая ϵ-окрестность этой точки $\sigma_{\bar{a}}(\epsilon)$ такая, что для любой точки $\bar{x} \in \sigma_{\bar{a}}(\epsilon)$, $\bar{x} \neq \bar{a}$ справедливо неравенство $f(\bar{x}) < f(\bar{a})$;

если $f(\bar{x}) \leq f(\bar{a})$, то $\bar{a}$ называется точкой *нестрогого локального максимума*;

если $f(\bar{x}) > f(\bar{a})$, то $\bar{a}$ называется точкой *строгого локального минимума*;

если $f(\bar{x}) \geq f(\bar{a})$, то $\bar{a}$ называется точкой *нестрогого локального минимума.*

Теорема (необходимое условие экстремума). *Если точка $\bar{a}$ — точка локального экстремума (строгого или нестрогого) числовой функции $y = f(\bar{x})$ и $y = f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{a}$, то $\dfrac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$ (т. е.* $\operatorname{grad} f(\bar{a}) = \bar{0}$).

Доказательство. Рассмотрим семейство функций одной переменной $g_i(x_i) = f(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n)$, $i = 1, \ldots, n$, тогда в точке $x_i = a_i$ функция $g_i(x_i)$ имеет локальный экстремум и поэтому в силу необходимого условия экстремума для функций одной переменной (см. теорему Ферма § 4.8) $g_i'(a_i) = 0$ или $\dfrac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} = 0$. **Теорема доказана.**

Точки $\bar{a}$, в которых $\operatorname{grad} f(\bar{a}) = \bar{0}$, называются *стационарными точками* функции $y = f(\bar{x})$.

Пусть $f : \mathbf{R}^n \to R^1$, $y = f(\bar{x})$ дважды дифференцируема в точке $\bar{a}$, тогда по теореме Юнга $\dfrac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_j \partial x_i}$ и можно построить симметрическую квадратичную форму

$$\Phi(\bar{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \equiv d^2 f(\bar{a})\Big|_{d\bar{x}=\bar{h}}.$$

Теорема (достаточное условие экстремума). *Пусть функция $y = f(\bar{x})$, $f : \mathbf{R}^n \to R^1$, дважды дифференцируема в точке $\bar{a}$, $\dfrac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, тогда:*

а) *если квадратичная форма $\Phi(\bar{h})$ положительно (отрицательно) определена, то $y = f(\bar{x})$ имеет в точке $\bar{a}$ локальный минимум (максимум);*

б) *если квадратичная форма $\Phi(\bar{h})$ неопределенная, то $y = f(\bar{x})$ не имеет в точке $\bar{a}$ локального экстремума.*

Доказательство. Пусть $y = f(\bar{x})$ удовлетворяет условиям теоремы, тогда по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеем при любом $\bar{a} + \bar{h} \in \sigma_{\bar{a}}(\delta)$

$$f(\bar{a}+\bar{h}) = f(\bar{a}) + df(\bar{a})\Big|_{d\bar{x}=\bar{h}} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + \mathrm{o}\left(|\bar{h}|^2\right)$$

или

$$f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) = \frac{1}{2}\Phi(\bar{h}) + \mathrm{o}\left(|\bar{h}|^2\right) \quad \text{при} \quad \bar{h} \to 0.$$

а) Если квадратичная форма $\Phi(\bar{h})$ положительно (отрицательно) определена, то по лемме о квадратичных формах из §7.1 существует положительное (отрицательное) число $C > 0$ ($C < 0$) такое, что $\forall \bar{h}$ выполняется неравенство $\Phi(\bar{h}) \geq C|\bar{h}|^2$ $\left(\Phi(\bar{h}) \leq C|\bar{h}|^2\right)$, тогда

$$f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) \geq \frac{1}{2}\left(C + \mathrm{o}(1)\right)|\bar{h}|^2$$

$$\left(f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) \leq \frac{1}{2}\Big(C + \mathrm{o}(1)\Big)|\bar{h}|^2\right).$$

Так как $\mathrm{o}(1) \to 0$ при $\bar{h} \to 0$, то существует $0 < \delta_1 < \delta$ такое, что для любого $|\bar{h}| < \delta_1$ выполняется неравенство $C + \mathrm{o}(1) \geq \dfrac{C}{2} > 0$ $\left(C + \mathrm{o}(1) \leq \dfrac{C}{2} < 0\right)$, тогда $\forall\, (\bar{a} + \bar{h}) \in \sigma_{\bar{a}}(\delta_1) \subset \sigma_{\bar{a}}(\delta)$ справедливо неравенство

$$f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) \geq \frac{C}{4}|\bar{h}|^2 > 0 \quad \left(f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) \leq \frac{C}{4}|\bar{h}|^2 < 0\right),$$

т. е. $\bar{a}$ — точка локального минимума (максимума).

б) Если квадратичная форма $\Phi(\bar{h})$ неопределенная, то найдутся $\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2$ такие, что $\Phi(\bar{h}_1) = C_1 > 0$ и $\Phi(\bar{h}_2) = C_2 < 0$. Тогда найдется положительное число $\delta_2 > 0$ такое, что $\forall\, 0 < t < \delta_2$ $\bar{a} + t \cdot \bar{h}_1 \in \sigma_{\bar{a}}(\delta_1)$ и $\bar{a} + t \cdot \bar{h}_2 \in \sigma_{\bar{a}}(\delta_1)$. Для этих точек имеем

$$f(\bar{a} + t \cdot \bar{h}_1) - f(\bar{a}) = \frac{1}{2}\left(\Phi(t \cdot \bar{h}_1) + \mathrm{o}\left(|t \cdot \bar{h}_1|^2\right)\right) =$$

$$= \frac{t^2}{2}\left(\Phi(\bar{h}_1) + \mathrm{o}\left(|\bar{h}_1|^2\right)\right) =$$
$$= \frac{t^2}{2}\left(C_1 + |\bar{h}_1|^2\,\mathrm{o}\,(1)\right) \geq \frac{C_1 t^2}{4} > 0,$$
$$f(\bar{a} + t\cdot\bar{h}_2) - f(\bar{a}) = \frac{t^2}{2}\left(C_2 + |\bar{h}_1|^2\,\mathrm{o}\,(1)\right) \leq \frac{C_2 t^2}{4} < 0,$$

т. е. $\bar{a}$ не является точкой локального экстремума. **Теорема доказана.**

Замечание. Если функция $y = f(\bar{x})$, $f : \mathbf{R}^n \to R^1$, трижды дифференцируема в точке $\bar{a}$, $\dfrac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$, то тип точки $\bar{a}$ определяется исследованием знакоопределенности 3-й формы $d^3 f(\bar{a})\Big|_{d\bar{x}=\bar{h}}$ (и так далее).

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = z\ln z - z - z\ln xy + xy + x^2 + 2y^2 - 4x - 2y.$$

Выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{z}{x} + y + 2x - 4 = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{z}{y} + x + 4y - 2 = 0; \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \ln z + 1 - 1 - \ln xy = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = \dfrac{1}{2}; \\ z = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = \dfrac{1}{2}; \\ z = 1. \end{cases}$$

Подозрительной на экстремум точкой является $M_0\left(2; \dfrac{1}{2}; 1\right)$. Вычислим в этой точке значения всех вторых частных производных:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} = \left.\left(\frac{z}{x^2} + 2\right)\right|_{M_0} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{x}\bigg|_{M_0} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\bigg|_{M_0} = \left(\frac{z}{y^2} + 4\right)\bigg|_{M_0} = 4+4 = 8,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\frac{1}{y}\bigg|_{M_0} = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{z}\bigg|_{M_0} = 1,$$

составим матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 8 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

и вычислим все ее главные миноры:

$$\Delta_1 = \frac{9}{4} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{9}{4} & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 18 - 1 = 17 > 0,$$

$$\Delta_3 = \det A = 18 + 1 + 1 - 2 - 1 - 9 = 8 > 0.$$

В силу критерия Сильвестра квадратичная форма положительно определена и в соответствии с доказанной теоремой $M_0\left(2; \frac{1}{2}; 1\right)$ является точкой локального минимума.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию

$$u = 3x^3 + y^2 + 6xy + (z-1)^2.$$

Выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 9x^2 + 6y = 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y + 6x = 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 2(z-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2y = 0; \\ y + 3x = 0; \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0; \\ y = -3x; \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0; \\ y_1 = 0; \\ z_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2; \\ y_2 = -6; \\ z_2 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, здесь две подозрительные на экстремум точки $M_1(0; 0; 1)$ и $M_2(2; -6; 1)$. Найдем все вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 18x, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2.$$

Матрица квадратичной формы в точке $M_1(0; 0; 1)$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

ее первый главный минор равен нулю, т. е. критерий Сильвестра «не работает», поэтому попробуем определить знак квадратичной формы, исследуя ее непосредственно:

$$\Phi(h_1, h_2, h_3) = 12h_1h_2 + 2h_2^2 + 2h_3^2.$$

Поскольку $\Phi(1, 1, 1) = 12 + 2 + 2 = 16 > 0$ и $\Phi(-1, 1, 1) = -12 + 2 + 2 = -8 < 0$, то эта форма неопределенная, и значит точка $M_1(0; 0; 1)$ не является точкой экстремума.

Матрица квадратичной формы в точке $M_2(2; -6; 1)$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 36 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

все ее главные миноры

$$\Delta_1 = 36 > 0, \quad \Delta_2 = 36 > 0, \quad \Delta_3 = \det A = 72 > 0$$

положительны, а значит $M_2(2; -6; 1)$ является точкой локального минимума.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию

$$u = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1.$$

Выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y - 2z = 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x + 2y + 3 = 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = -2x + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z = x; \\ y = 2z - 3x^2; \\ x = -2y - 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2z = x; \\ y = 2z - 3x^2; \\ x = -2(x - 3x^2) - 3 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1; \\ y_1 = -2; \\ z_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\dfrac{1}{2}; \\ y_2 = -\dfrac{5}{4}; \\ z_2 = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Получили две подозрительные на экстремум точки $M_1\left(1; -2; \dfrac{1}{2}\right)$ и $M_2\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{5}{4}; -\dfrac{1}{4}\right)$. Найдем все вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4.$$

Матрица квадратичной формы в точке $M_1\left(1; -2; \dfrac{1}{2}\right)$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

все ее главные миноры

$$\Delta_1 = 6 > 0, \quad \Delta_2 = 11 > 0, \quad \Delta_3 = \det A = 36 > 0$$

положительны, а значит $M_1\left(1; -2; \dfrac{1}{2}\right)$ является точкой локального минимума и $u_{\min} = -4{,}5$.

В точке $M_2\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{5}{4}; -\dfrac{1}{4}\right)$ матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

все ее главные миноры

$$\Delta_1 = -3 < 0, \quad \Delta_2 = -7 < 0, \quad \Delta_3 = \det A = -36 < 0$$

отрицательны, а значит $M_2\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{5}{4}; -\dfrac{1}{4}\right)$ не является точкой экстремума.

Пример 4. Очевидно функция $u = x^4 + y^4$ имеет в точке (0;0) минимум. Эту же точку получим из необходимых условий экстремума. Все частные производные до третьего порядка включительно равны нулю в этой точке. Поэтому для проверки достаточных условий требуется исследование знакоопределенности 4-й формы, имеющей вид

$$d^4 f\Big|_{d\bar{x}=\bar{h}} = 24(h_1^4 + h_2^4) > 0 \quad \forall \bar{h} \neq 0.$$

8.7. Неявные функции. Теоремы о неявных функциях

1. Условимся внутри этого пункта точки пространства $\mathbf{R}^n$ обозначать $(\bar{x}, y)$, где $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Пусть задано некоторое уравнение $f(\bar{x}, y) = 0$.

Определение. Функция $y = \varphi(\bar{x})$, зависящая от $n-1$ переменных $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ и заданная в некоторой

δ-окрестности $\sigma_{\bar{a}}(\delta)$ точки $\bar{a} \in \mathbf{R}^{n-1}$, называется *неявной функцией*, задаваемой уравнением $f(\bar{x}, y) = 0$, если $\forall \bar{x} \in \sigma_{\bar{a}}(\delta)$ справедливо равенство $f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0$.

Определение. Функция $z = f(\bar{x}, y)$ называется *гладкой* в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, если в любой точке области Ω существуют все первые частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ и они непрерывны по совокупности переменных в области Ω.

Замечание. Согласно первому достаточному условию дифференцируемости функции (см. § 8.2) гладкость функции $z = f(\bar{x}, y)$ на области Ω гарантирует ее дифференцируемость в каждой точке области Ω, что в свою очередь влечет непрерывность $z = f(\bar{x}, y)$ во всех точках области Ω (см. замечание 2 из § 8.2). Таким образом гладкость функции $z = f(\bar{x}, y)$ в области Ω эквивалентна непрерывности как самой функции $z = f(\bar{x}, y)$, так и всех ее частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в этой области.

Теорема (о неявной функции). *Пусть выполнены следующие условия:*

а) *функция $f(\bar{x}, y)$ гладкая в некоторой ϵ-окрестности точки $(\bar{a}, b) \in \mathbf{R}^n$;*

б) $f(\bar{a}, b) = 0$;

в) $\dfrac{\partial f(\bar{a}, b)}{\partial y} \neq 0$,

тогда существует единственная неявная функция $y = \varphi(\bar{x})$, определенная в некоторой δ-окрестности $\sigma_{\bar{a}}(\delta)$ точки $\bar{a} \in \mathbf{R}^{n-1}$, такая, что

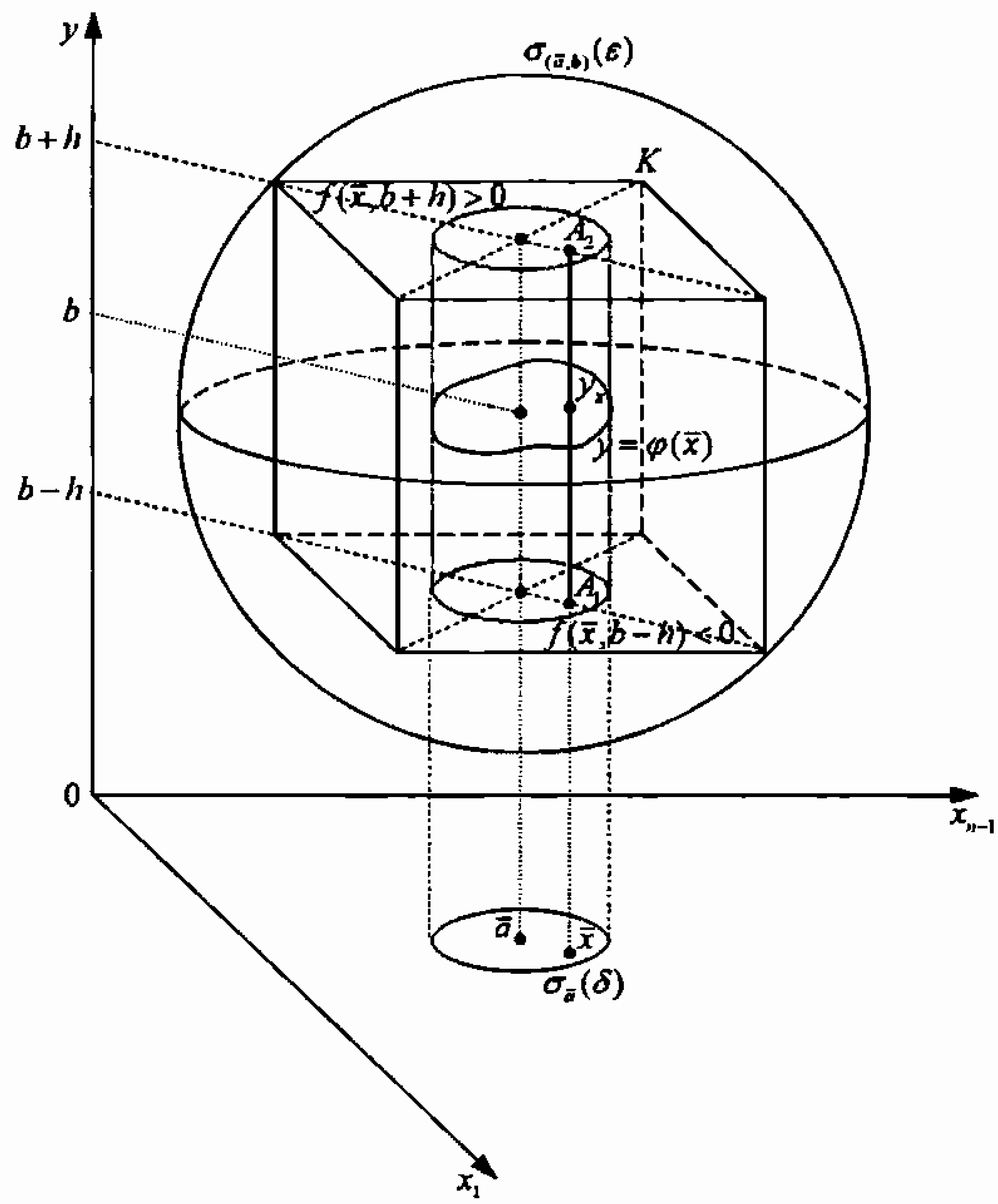
1) $\varphi(\bar{a}) = b$;

2) *$\forall \bar{x} \in \sigma_{\bar{a}}(\delta)$ справедливо равенство $f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0$;*

3) *функция* $y = \varphi(\bar{x})$ *гладкая на* $\sigma_{\bar{a}}(\delta)$, *причем*

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi(\bar{x})}{\partial x_i} = -\left.\frac{\frac{\partial f(\bar{x},y)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(\bar{x},y)}{\partial y}}\right|_{y=\varphi(\bar{x})} = -\left.\frac{f'_{x_i}(\bar{x},y)}{f'_y(\bar{x},y)}\right|_{y=\varphi(\bar{x})}.$$

Доказательство. Пусть для определенности $\dfrac{\partial f(\bar{a},b)}{\partial y} > 0$. Так как $\dfrac{\partial f(\bar{x},y)}{\partial y}$ непрерывна на $\sigma_{(\bar{a},b)}(\epsilon)$, то существует замкнутый n-мерный куб $K \subset \sigma_{(\bar{a},b)}(\epsilon)$ с центром в точке $(\bar{a},b)$, ребрами, параллельными осям координат, и длинами $2h$, на котором $\dfrac{\partial f(\bar{x},y)}{\partial y}$ как непрерывная функция достигает своего минимума $m = \min\limits_K \dfrac{\partial f}{\partial y} > 0$. Так как $\dfrac{\partial f}{\partial y} > 0$ на K, то функция $f(\bar{a},y)$ монотонно возрастает, и поскольку $f(\bar{a},b) = 0$, то $f(\bar{a},b+h) > 0$ и $f(\bar{a},b-h) < 0$.



В силу непрерывности $f(\bar{x}, y)$ на K (по теореме о сохранении знака непрерывной функции) существует $\sigma_{\bar{a}}(\delta)$ такая, что для любого $x \in \sigma_{\bar{a}}(\delta)$ выполняются неравенства $f(\bar{x}, b+h) > 0$ и $f(\bar{x}, b-h) < 0$. Каждому $x \in \sigma_{\bar{a}}(\delta)$ поставим в соответствие отрезок $[A_1, A_2]$, $A_1(\bar{x}, b-h)$, $A_2(\bar{x}, b+h)$, на котором функция $f(\bar{x}, y)$ как функция одного переменного y монотонно возрастает, а значит $\forall x \in \sigma_{\bar{a}}(\delta)$ существует единственная $y_x \in [b-h,\ b+h]$ такая, что $f(\bar{x}, y_x) = 0$. Таким образом определена функция $\varphi(\bar{x}) : \bar{x} \to y_x$ такая, что $f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0$, причем в силу условия б) теоремы $\varphi(\bar{a}) = b$. Покажем, что $y = \varphi(\bar{x})$ — искомая функция, для этого надо доказать ее гладкость.

Вначале докажем непрерывность построенной функции $y = \varphi(\bar{x})$. Пусть выбрана пара произвольных точек $\bar{x}$, $\bar{x}_0 \in \sigma_{\bar{a}}(\delta)$, $y = \varphi(\bar{x})$, $y_0 = \varphi(\bar{x}_0)$, $\Delta y = \Delta\varphi = \varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{x}_0)$, $f(\bar{x}, y) = f(\bar{x}_0, y_0) = 0$. Рассмотрим новую функцию переменной $t \in [0, 1]$ вида

$$g(t) = f(\bar{x}_0 + t\Delta\bar{x}, y_0 + t\Delta y) \equiv f(\bar{x}_0 + t(\bar{x} - \bar{x}_0), y_0 + t(y - y_0)).$$

Очевидно $g(0) = f(\bar{x}_0, y_0) = 0$, $g(1) = f(\bar{x}, y) = 0$, т. е. $g(0) = g(1) = 0$, кроме того, $g(t)$ дифференцируема на $[0, 1]$ по теореме о дифференцируемости сложной функции (см. § 8.2), причем

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f(\bar{x}_0 + t\Delta\bar{x}, y_0 + t\Delta y)}{\partial x_i} \Delta x_i + \\ + \frac{\partial f(\bar{x}_0 + t\Delta\bar{x}, y_0 + t\Delta y)}{\partial y} \Delta y.$$

По теореме Ролля (см. § 4.8) существует $\theta \in (0, 1)$ такое, что $g'(\theta) = 0$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f(\bar{x}_0 + \theta\Delta\bar{x}, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x_i} \Delta x_i +$$

$$+\frac{\partial f(\bar{x}_0+\theta\Delta\bar{x}, y_0+\theta\Delta y)}{\partial y}\Delta y = 0.$$

Отсюда получим

$$\frac{\Delta y}{|\Delta\bar{x}|} = -\sum_{i=1}^{n-1}\frac{f'_{x_i}(\bar{x}_0+\theta\Delta\bar{x}, y_0+\theta\Delta y)}{f'_y(\bar{x}_0+\theta\Delta\bar{x}, y_0+\theta\Delta y)}\cdot\frac{\Delta x_i}{|\Delta\bar{x}|},$$

где $\quad|\Delta\bar{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}\Delta x_i^2}, \quad$ тогда

$$\left|\frac{\Delta y}{|\Delta\bar{x}|}\right| \le \sum_{i=1}^{n-1}\frac{M_i}{m}\cdot 1,$$

здесь $\quad M_i = \max_K\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|, \quad$ т. е. разностное отношение

$$\frac{\Delta y}{|\Delta\bar{x}|} = \frac{\varphi(\bar{x})-\varphi(\bar{x}_0)}{|\Delta\bar{x}|} \quad \text{— ограниченная величина,}$$

а значит $|\Delta y| = \left|\dfrac{\Delta y}{|\Delta\bar{x}|}\right|\cdot|\Delta\bar{x}| \xrightarrow{\Delta\bar{x}\to 0} 0$, или $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0}\Delta\varphi = 0$, что и означает непрерывность функции $y=\varphi(\bar{x})$ в любой точке $\bar{x}_0 \in \sigma_{\bar{a}}(\delta)$.

Если вектор приращений имеет специальный вид $\Delta\bar{x}_i = (0,\ldots,\Delta x_i,\ldots,0)$, то, повторяя все проведенные рассуждения, найдем $n-1$ чисел $\theta_i \in (0,1)$ таких, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x_i} = -\frac{f'_{x_i}(x_1,\ldots,x_i+\theta_i\Delta x_i,\ldots,x_{n-1},y_0+\theta_i\Delta y)}{f'_y(x_1,\ldots,x_i+\theta_i\Delta x_i,\ldots,x_{n-1},y_0+\theta_i\Delta y)}.$$

В силу непрерывности частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y} > 0$ по теореме о непрерывности сложной функции существует предел разностного отношения

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x_i} =$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\varphi(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_{n-1}) - \varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1})}{\Delta x_i} =$$

$$= - \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_i + \theta_i \Delta x_i, \ldots, x_{n-1}, y_0 + \theta_i \Delta y)}{f'_y(x_1, \ldots, x_i + \theta_i \Delta x_i, \ldots, x_{n-1}, y_0 + \theta_i \Delta y)} =$$

$$= - \frac{f'_{x_i}(\bar{x}_0, y_0)}{f'_y(\bar{x}_0, y_0)} = - \frac{f'_{x_i}(\bar{x}, y)}{f'_y(\bar{x}, y)} \bigg|_{\bar{x} = \bar{x}_0,\, y = y_0 = \varphi(\bar{x}_0)}$$

В силу произвольности точки $\bar{x}_0 \in \sigma_{\bar{a}}(\delta)$ получаем требуемую формулу для частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \frac{f'_{x_i}(\bar{x}, y)}{f'_y(\bar{x}, y)} \bigg|_{y = \varphi(\bar{x})}.$$

Но функции $f'_{x_i}(\bar{x}, y)$ и $f'_y(\bar{x}, y) > 0$ непрерывны по условию теоремы, $y = \varphi(\bar{x})$ непрерывна по доказанному, поэтому по теореме о непрерывности сложной функции $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ непрерывна на $\sigma_{\bar{a}}(\delta)$, что и завершает доказательство гладкости функции $y = \varphi(\bar{x})$. **Теорема доказана.**

Пример 1. Доказать, что уравнение $z^3 - 3xyz = 8$ определяет единственную дифференцируемую неявную функцию $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки $(0, -1, 2)$. Вычислить $z_x(0, -1)$ и $z_y(0, -1)$.

Функция $f(x, y, z) = 3xyz - z^3 + 8$ гладкая на $\mathbf{R}^3$ и

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \bigg|_{(0,-1,2)} = 3xy - 3z^2 = 3(xy - z^2) = -12 \neq 0,$$

т. е. рассматриваемое уравнение действительно локально разрешимо относительно $z = z(x, y)$. Продифференцируем уравнение по x

$$3z^2 z'_x - 3yz - 3xyz'_x = 0,$$

откуда получаем

$$z_x(0,-1) = \left.\frac{yz}{z^2 - xy}\right|_{(0,-1,2)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Точно также находим

$$z_y(0,-1) = \left.\frac{xz}{z^2 - xy}\right|_{(0,-1,2)} = \frac{0}{4} = 0.$$

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $z = z(x, y)$, неявно заданную уравнением

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0.$$

Чтобы выписать необходимые условия экстремума, нужны выражения для первых производных функции $z = z(x, y)$, которые получим дифференцированием исходного уравнения по x и y. После дифференцирования уравнения по x имеем

$$10x + 10z \cdot z'_x - 2y - 2z - 2x \cdot z'_x - 2y \cdot z'_x = 0,$$

$$5x + (5z - x - y) \cdot z'_x - y - z = 0$$

или

$$z'_x = \frac{y + z - 5x}{5z - x - y}.$$

Аналогично получаем

$$10y + 10z \cdot z'_y - 2x - 2x \cdot z'_y - 2z - 2y \cdot z'_y = 0,$$

$$5y + (5z - x - y) \cdot z'_y - x - z = 0$$

или

$$z'_y = \frac{x + z - 5y}{5z - x - y}.$$

Выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} z'_x = \dfrac{y+z-5x}{5z-x-y} = 0; \\ z'_y = \dfrac{x+z-5y}{5z-x-y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z-5x=0; \\ x+z-5y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{z}{4}; \\ y = \dfrac{z}{4}. \end{cases}$$

Подставим найденные представления для x и y в исходное уравнение

$$5\left(\frac{z}{4}\right)^2+5\left(\frac{z}{4}\right)^2+5z^2-2\left(\frac{z}{4}\right)\cdot\left(\frac{z}{4}\right)-2\left(\frac{z}{4}\right)\cdot z-2\left(\frac{z}{4}\right)\cdot z-72=0$$

или

$$z^2 = 16 \quad\Rightarrow\quad z = \pm 4,$$

откуда получаем две точки, подозрительные на экстремум, $M_1(1;1;4)$ и $M_2(-1;-1;-4)$. Найдем все вторые частные производные:

$$z''_{xx} = \frac{(z'_x-5)(5z-x-y)-(y+z-5x)(5z'_x-1)}{(5z-x-y)^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{(1+z'_y)(5z-x-y)-(y+z-5x)(5z'_y-1)}{(5z-x-y)^2},$$

$$z''_{yy} = \frac{(z'_y-5)(5z-x-y)-(x+z-5y)(5z'_y-1)}{(5z-x-y)^2}$$

и вычислим их значения в подозрительных на экстремум точках.

В точке $M_1(1;1;4)$ находим

$$z''_{xx}\Big|_{M_1} = \frac{(-5)\cdot(20-1-1)-(1+4-5)\cdot(-1)}{(20-1-1)^2} =$$

$$= -\frac{90}{(18)^2} = -\frac{5}{18},$$

$$z''_{xy}\Big|_{M_1} = \frac{1\cdot(20-1-1)-(1+4-5)\cdot(-1)}{(20-1-1)^2} = \frac{1}{18},$$

$$z''_{yy}\Big|_{M_1} = \frac{(-5)\cdot(20-1-1)-(1+4-5)\cdot(-1)}{(20-1-1)^2} = -\frac{5}{18}.$$

Тогда матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{18} & \dfrac{1}{18} \\ \dfrac{1}{18} & -\dfrac{5}{18} \end{pmatrix},$$

а ее главные миноры равны

$$A_1 = -\frac{5}{18} < 0,$$

$$A_2 = \det A = \frac{25-1}{18^2} = \frac{24}{18^2} = \frac{4}{3\cdot 18} = \frac{2}{27} > 0,$$

т. е. $M_1(1;1;4)$ — точка локального максимума и $z_{\max} = 4$.

В точке $M_2(-1;-1;-4)$

$$z''_{xx}\Big|_{M_2} = \frac{(-5)\cdot(-20+1+1)-(-1-4+5)\cdot(-1)}{(-20+1+1)^2} = \frac{5}{18},$$

$$z''_{xy}\Big|_{M_2} = \frac{1\cdot(-20+1+1)-(-1-4+5)\cdot(-1)}{(-20+1+1)^2} = -\frac{1}{18},$$

$$z''_{yy}\Big|_{M_2} = \frac{(-5)\cdot(-20+1+1)-(-1-4+5)\cdot(-1)}{(-20+1+1)^2} = \frac{5}{18},$$

матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{18} & -\dfrac{1}{18} \\ -\dfrac{1}{18} & \dfrac{5}{18} \end{pmatrix}$$

и главные миноры

$$A_1 = \frac{5}{18} > 0, \quad A_2 = \det A = \frac{2}{27} > 0,$$

т. е. $M_2(-1;-1;-4)$ — точка локального минимума и $z_{\min} = -4$.

2. Рассмотрим отображение

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m, \quad f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})),$$

где все координатные функции $f_i(\bar{x})$ являются гладкими в некоторой ϵ-окрестности точки $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$, $\sigma_{\bar{a}}(\epsilon)$. Такие отображения называются *гладкими*.

Определение. Если все координатные функции $f_i(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, m$, дифференцируемы в точке $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, то прямоугольная $m \times n$ матрица вида

$$J = J_f = \left\| \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right\| = \left\| \frac{\partial f_i(\bar{x})}{\partial x_j} \right\|,$$

$$i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n,$$

называется *матрицей Якоби* (*якобианом*) *отображения* $f(\bar{x})$.

Очевидно i-я строка якобиана представляет собой градиент координатной функции $f_i(\bar{x})$.

Пусть $m < n$. Отображение $f(\bar{x}) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ называется *невырожденным в точке* $\bar{a}$, если все координатные функции $f_i(\bar{x})$ дифференцируемы в точке $\bar{a}$ и матрица Якоби имеет полный ранг m, т. е. векторы $\operatorname{grad} f_1(\bar{a}), \ldots, \operatorname{grad} f_m(\bar{a})$ линейно независимы. Далее для определенности будем считать, что отличный от нуля минор m-го порядка находится в последних m столбцах матрицы Якоби.

Теорема (о системе неявных функций). *Пусть* $n = p + m$, $p > 0$ *и выполнены следующие условия:*

а) *отображение* $f(\bar{x}, \bar{y}) : \mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^p \otimes \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ *гладкое в некоторой* ϵ-*окрестности* $\sigma_{(\bar{a},\bar{b})}(\epsilon)$ *точки* $(\bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_p)$, $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_m)$;

б) $f(\bar{a}, \bar{b}) = 0$;

в) *отображение* $f(\bar{x},\bar{y})$ *невырождено в точке* $(\bar{a},\bar{b})$, *т. е.*

$$\det\left\|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\right\|\Bigg|_{(\bar{a},\bar{b})}\neq 0,$$

тогда существует δ*-окрестность точки* $\bar{a}$ $\sigma_{\bar{a}}(\delta)\subset\mathbf{R}^p$, *в которой определено единственное гладкое отображение*

$$\bar{y}=\varphi(\bar{x})=(\varphi_1(\bar{x}),\ldots,\varphi_m(\bar{x})):\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^m,\quad \bar{x}\in\sigma_{\bar{a}}(\delta)\subset\mathbf{R}^p,$$

обладающее свойствами:

1) $\bar{b}=\varphi(\bar{a})$, *т. е.* $f(\bar{a},\bar{b})=f(\bar{a},\varphi(\bar{a}))=0$;

2) $\forall\,\bar{x}\in\sigma_{\bar{a}}(\delta)$ *справедливо равенство* $f(\bar{x},\varphi(\bar{x}))=0$;

3) *якобиан отображения* $\bar{y}=\varphi(\bar{x})$ *имеет вид*

$$J_\varphi(\bar{x})=\left\|\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_p)}\right\|=$$

$$=-\left(\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_p)}\right)\Bigg|_{\bar{y}=\varphi(\bar{x})}.$$

Доказательство. Определитель $D=\left|\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\right|$ разложим по последнему столбцу, получим

$$D=D_1\frac{\partial f_1}{\partial y_m}+D_2\frac{\partial f_2}{\partial y_m}+\ldots+D_m\frac{\partial f_m}{\partial y_m},$$

здесь D_i — соответствующие алгебраические дополнения. Так как $D\neq 0$, то хотя бы одно из алгебраических дополнений D_i не обращается в ноль, для определенности будем считать $D_1\neq 0$.

Дальнейшее доказательство будем проводить индукцией по m. При $m=1$ утверждение теоремы следует из предыдущей теоремы. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для системы из $m-1$ уравнений. Так как $D_1 \neq 0$, то применим предположение индукции к последним $m-1$ уравнениям $f_2(\bar{x},\bar{y}) = 0, \ldots, f_m(\bar{x},\bar{y}) = 0$, получим функции

$$y_1 = \psi_1(\bar{x}, y_m), \quad \ldots, \quad y_{m-1} = \psi_{m-1}(\bar{x}, y_m),$$

удовлетворяющие уравнениям

$$f_i(\bar{x}, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}, y_m) = 0, \quad i = 2, \ldots, m,$$
$$\forall (\bar{x}, y_m) \in \sigma_{(\bar{a}, b_m)}(\delta_1).$$

Подставим функции $\psi_i(\bar{x}, y_m)$ в первое уравнение системы $f_1(\bar{x},\bar{y}) = 0$. Получим

$$f_1(\bar{x}, \psi_1(\bar{x}, y_m), \ldots, \psi_{m-1}(\bar{x}, y_m), y_m) = \Phi(\bar{x}, y_m) = 0.$$

Покажем, что

$$\left.\frac{\partial \Phi(\bar{x}, y_m)}{\partial y_m}\right|_{(\bar{a}, b_m)} \neq 0.$$

Для этого продифференцируем уравнения $\Phi(\bar{x}, y_m) = 0$ и $f_i(\bar{x}, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}, y_m) = 0$, $i = 2, \ldots, m$, по y_m:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_m} = \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y_m} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_1}{\partial y_m},$$
$$0 = \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y_m} + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_2}{\partial y_m},$$
$$\ldots \quad \ldots$$
$$0 = \frac{\partial f_m}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y_m} + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_m}{\partial y_m}.$$

Домножим первое уравнение этой системы на D_1, второе — на D_2 и т. д., сложим их, получим

$$D_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_m} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1} D_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_1} D_2 + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial y_1} D_m\right) \frac{\partial \psi_1}{\partial y_m} + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_{m-1}} D_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_{m-1}} D_2 + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}} D_m\right) \frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial y_m} +$$

$$+\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_m}D_1+\frac{\partial f_2}{\partial y_m}D_2+\ldots+\frac{\partial f_m}{\partial y_m}D_m\right)=D.$$

Первые $m-1$ скобок обратились в ноль, так как представляют собой разложение определителя m-го порядка с двумя одинаковыми столбцами. Поскольку $D\neq 0$ и $D_1\neq 0$, то $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y_m}=\dfrac{D}{D_1}\neq 0$. Следовательно, по теореме о неявных функциях существует единственная функция $y_m=\varphi_m(\bar{x})$ такая, что в некоторой δ-окрестности точки $\bar{a}$ $\sigma_{\bar{a}}(\delta)$ выполняется равенство $f_1(\bar{x},\bar{\varphi}(\bar{x}))=0$, где

$$\varphi_1(\bar{x})=\psi_1(\bar{x},\varphi_m(\bar{x})),\ldots,\varphi_{m-1}(\bar{x})=\psi_{m-1}(\bar{x},\varphi_m(\bar{x})).$$

Соответственно, в этой же окрестности $f_i(\bar{x},\bar{\varphi}(\bar{x}))=0$, $i=2,\ldots,m$. Что и завершает доказательство первых двух утверждений теоремы.

Для доказательства утверждения 3 теоремы вычислим дифференциалы всех функций $f_i(\bar{x},\bar{\varphi}(\bar{x}))=0$, $i=1,\ldots,m$,

$$0=df_i=\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\,dx_1+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial x_p}\,dx_p+\frac{\partial f_i}{\partial y_1}\,d\varphi_1+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial y_m}\,d\varphi_m.$$

В матричном виде эта система выглядит следующим образом:

$$\left(\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_p)}\right)\begin{pmatrix}dx_1\\ \vdots\\ dx_p\end{pmatrix}+\left(\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\right)\begin{pmatrix}d\varphi_1\\ \vdots\\ d\varphi_m\end{pmatrix}=0.$$

Но

$$\begin{pmatrix}d\varphi_1\\ \vdots\\ d\varphi_m\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_p)}\right)\begin{pmatrix}dx_1\\ \vdots\\ dx_p\end{pmatrix},$$

тогда для любого вектор-столбца $\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_p \end{pmatrix}$ справедливо равенство

$$\left(\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_p)}+\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\cdot\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_p)}\right)\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_p \end{pmatrix}=0,$$

которое возможно лишь при выполнении тождества

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_p)}+\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\cdot\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_p)}=0,$$

из которого в свою очередь вытекает утверждение 3 теоремы. **Теорема доказана.**

Пример 3. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} u^3+v^3=x(u+v)^2; \\ u^2+v^2=u+v+y \end{cases}$$

однозначно разрешима относительно $u = u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ в окрестности точки $x=u=1,\ \ v=y=0$.

Отображение $f(x,y,u,v):\mathbf{R}^4\equiv\mathbf{R}^2\otimes\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ с координатными функциями

$$f_1(x,y,u,v)=x(u+v)^2-u^3-v^3,$$
$$f_2(x,y,u,v)=y+u+v-u^2-v^2$$

является гладким на $\mathbf{R}^4$, удовлетворяет равенству $f(1;0;1;0)=0$, и его якобиан имеет вид

$$\left\|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y,u,v)}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix} (u+v)^2 & 0 & 2x(u+v)-3u^2 & 2x(u+v)-3v^2 \\ 0 & 1 & 1-2u & 1-2v \end{matrix}\right\|.$$

Поскольку отличен от нуля минор

$$\det \left\| \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)} \right\| \Bigg|_{(1;0;1;0)} = \begin{vmatrix} (2-3) & 2 \\ (1-2) & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то в силу теоремы о системе неявных функций получаем требуемое утверждение, при этом якобиан отображения с координатными функциями $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ в точке (1; 0) восстанавливается по правилу

$$\left\| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right\| \Bigg|_{(1;0)} = - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следствие (теорема об обратном отображении). *Пусть для отображения $\bar{y} = \varphi(\bar{x}) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ выполнены следующие условия:*

а) *отображение $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$ гладкое в окрестности точки $\bar{a}$;*

б) *отображение $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$ невырождено в точке $\bar{a}$, т. е.*

$$\det \left\| \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right\| \Bigg|_{\bar{x}=\bar{a}} \neq 0,$$

тогда существует обратное гладкое отображение $\bar{x} = \Psi(\bar{y}) = \varphi^{-1}(\bar{y})$, определенное в некоторой δ-окрестности точки $\bar{b} = \varphi(\bar{a})$, якобиан которого восстанавливается по формуле

$$\left\| \frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \right\| \Bigg|_{\bar{y}=\bar{b}} = \left(\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right)^{-1} \Bigg|_{\bar{x}=\bar{a}}.$$

Доказательство. Перепишем отображение $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$ в виде $\bar{y} - \varphi(\bar{x}) = 0$, а затем как систему неявных функций $f_i(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi_i(\bar{x}) - y_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, к которой применим теорему о системе неявных функций (при этом переменные $\bar{y}$ и $\bar{x}$ меняются ролями). **Следствие доказано.**

8.8. Условный экстремум функции многих переменных

Пусть требуется найти экстремум числовой функции

$$u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m),$$

зависящей от $n + m$ переменных при наличии m условий связи

$$F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Определение. Точка $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0) \in \mathbf{R}^{n+m}$ называется точкой *условного максимума* (*минимума*) функции $u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ при наличии связей $F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, если координаты точки M_0 удовлетворяют уравнениям связи и существует окрестность точки M_0, в пределах которой значение функции $u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ в точке M_0 является наибольшим (наименьшим) среди ее значений во всех точках окрестности, координаты которых удовлетворяют уравнениям связи.

1. Прямой метод (метод исключения) отыскания условного экстремума. Если все функции $F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, $i = 1, \ldots, m$, из условия связи гладкие в некоторой окрестности точке M_0 и в этой точке минор якобиана

$$\det \left\| \frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} \right\| \Bigg|_{M_0} \neq 0,$$

то по теореме о системе неявных функций существует окрестность точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbf{R}^n$, в пределах которой уравнения связи разрешимы относительно y_j, $j = 1, \dots, m$, т. е.

$$y_j = \varphi_j(x_1, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, m.$$

Подставляя эти представления в выражение для функции $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, сводим поставленную задачу к исследованию на безусловный экстремум функции

$$u = f(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Проиллюстрируем сказанное на следующих примерах.

Пример 1. Найти экстремум функции

$$u = x \cdot y \cdot z$$

при условиях связи

$$\begin{cases} x + y - z = 3; \\ x - y - z = 8. \end{cases}$$

Из условий связи находим

$$\begin{cases} y = -2{,}5; \\ z = x + y - 3 = x - 5{,}5, \end{cases}$$

тогда

$$u = x \cdot (-2{,}5) \cdot (x - 5{,}5) = -2{,}5x(x - 5{,}5).$$

Отсюда легко находим искомую точку условного экстремума (максимума)

$$\begin{cases} x^* = 2{,}75; \\ y^* = -2{,}5; \\ z^* = -2{,}75 \end{cases}$$

и $u_{\max} = u(2{,}75; -2{,}5; -2{,}75) = 2{,}5 \cdot 2{,}75^2 = 18{,}90625.$

Пример 2. Найти экстремум функции

$$u = x \cdot y^2 \cdot z^3$$

при условии связи

$$x + 2y + 3z = a, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad a > 0.$$

Из условия связи находим

$$x = a - 2y - 3z,$$

тогда

$$u = y^2 \cdot z^3 \cdot (a - 2y - 3z) = ay^2z^3 - 2y^3z^3 - 3y^2z^4.$$

Выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2ayz^3 - 6y^2z^3 - 6yz^4 = 2yz^3(a - 3y - 3z) = 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 3ay^2z^2 - 6y^3z^2 - 12y^2z^3 = 3y^2z^2(a - 2y - 4z) = 0, \end{cases}$$

из которых находим точку, подозрительную на экстремум, $y = z = \dfrac{a}{6}$ (отметим, что линии $y = 0$ и $z = 0$, на которых также выполняются необходимые условия экстремума, не удовлетворяют условиям связи, поэтому из дальнейшего рассмотрения их исключаем). Найдем все вторые частные производные и их значения в точке $y = z = \dfrac{a}{6}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2az^3 - 12yz^3 - 6z^4 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=z=\frac{a}{6}} = -\frac{a^4}{6^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 6ayz^2 - 18y^2z^2 - 24yz^3 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right|_{y=z=\frac{a}{6}} = -\frac{a^4}{6^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6ay^2z - 12y^3z - 36y^2z^2 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{y=z=\frac{a}{6}} = -2 \cdot \frac{a^4}{6^3}.$$

Матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{a^4}{6^3} & -\dfrac{a^4}{6^3} \\ -\dfrac{a^4}{6^3} & -2 \cdot \dfrac{a^4}{6^3} \end{pmatrix},$$

а ее главные миноры равны

$$A_1 = -\frac{a^4}{6^3} < 0, \quad A_2 = \det A = \frac{a^8}{6^6} > 0,$$

т. е. $M\left(\frac{a}{6}; \frac{a}{6}; \frac{a}{6}\right)$ — точка локального максимума и $z_{\max} = \left(\frac{a}{6}\right)^3$.

2. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Метод исключения переменных, рассмотренный в предыдущем пункте, применим лишь в случае явного выражения из условий связи одной группы переменных через другую, что возможно далеко не всегда. Поэтому, естественно, возникает необходимость в методах, лишенных этого недостатка. Таковым является метод множителей Лагранжа, изложению которого в тех же предположениях, что и в п. 1, посвящен этот пункт.

При выполнении условий п. 1 для функции

$$u = f(x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n))$$

должны выполняться необходимые условия экстремума (в точке M_0)

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = 0,$$
$$i = 1, \ldots, n.$$

Но функции $y_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n)$, $j = 1, \ldots, m$, при их подстановке в условия связи $F_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$, $j = 1, \ldots, m$, обращают их в тождества, поэтому все частные производные уравнений связи по x_i равны нулю (в точке M_0), т. е.

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} + \frac{\partial F_j}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_j}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F_j}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = 0,$$
$$j = 1, \ldots, m, \quad i = 1, \ldots, n.$$

При каждом *фиксированном* значении индекса i умножим j-равенство на числовой множитель λ_j и сложим все эти равенства с предыдущим, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m \cdot \frac{\partial F_m}{\partial x_i} +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial y_k} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_k} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_k} + \ldots + \lambda_m \cdot \frac{\partial F_m}{\partial y_k} \right) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = 0,$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

В силу условия $\det \left\| \dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} \right\| \Bigg|_{M_0} \neq 0$ константы $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ можно выбрать такими, чтобы

$$\frac{\partial f}{\partial y_k} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_k} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_k} + \ldots + \lambda_m \cdot \frac{\partial F_m}{\partial y_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

При таком выборе констант $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ последнее равенство приобретает вид

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m \cdot \frac{\partial F_m}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Но левые части полученных $n + m$ равенств есть ни что иное как частные производные функции

$$\Psi = f + \lambda_1 \cdot F_1 + \lambda_2 \cdot F_2 + \ldots + \lambda_m \cdot F_m$$

по переменным $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m$. Функция Ψ называется *функцией Лагранжа*, а числа λ_i — *множителями Лагранжа*. Присоединяя к этим $n + m$ равенствам условия связи, получим *необходимые* условия условного экстремума в виде системы $n + 2m$ уравнений

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n; \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y_j} = 0; \qquad F_j = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

для определения $n + m$ координат точек M_0 возможного условного экстремума и m множителей Лагранжа $\lambda_1, \ldots,$ λ_m.

Для получения *достаточных* условий условного экстремума заметим, что при выполнении условий связи функция Лагранжа Ψ совпадает с f, поэтому знак соответствующей квадратичной формы $\Phi(\bar{h})$ (построенной для Ψ) должен исследоваться при следующих ограничениях (в точке M_0) на $\bar{h}$:

$$dF_j\Big|_{d\bar{x}=\bar{h}} = (\operatorname{grad} F_j, \bar{h}) = 0 \quad j = 1, \ldots, m,$$

вытекающих из условий связи.

Пример 3. Найти экстремум функции

$$u = x \cdot y \cdot z$$

при условиях связи

$$\begin{cases} x + y + z = 5; \\ xy + yz + xz = 8 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0; \\ F_2(x, y, z) = xy + yz + xz - 8 = 0. \end{cases}$$

Составим функцию Лагранжа

$$\Psi = xyz + \lambda \cdot (x + y + z - 5) + \mu \cdot (xy + yz + xz - 8)$$

и выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = yz + \lambda + \mu(y + z) = 0; \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = xz + \lambda + \mu(x + z) = 0; \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial z} = xy + \lambda + \mu(x + y) = 0; \\ x + y + z = 5; \\ xy + yz + xz = 8. \end{cases}$$

Преобразуем эту систему, вычитая из первого уравнения второе, прибавляя ко второму уравнению первое и третье, оставим без изменения остальные уравнения, получим

$$\begin{cases} (y-x)z+\mu(y-x)=(y-x)(z+\mu)=0; \\ yz+xz+xy+3\lambda+2\mu(x+y+z)=3\lambda+10\mu+8=0; \\ xy+\lambda+\mu(x+y)=0; \\ x+y+z=5; \\ xy+yz+xz=8, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} y=x; \\ 3\lambda+10\mu+8=0; \\ xy+\lambda+\mu(x+y)=0; \\ x+y+z=5; \\ xy+yz+xz=8 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z=-\mu; \\ 3\lambda+10\mu+8=0; \\ xy+\lambda+\mu(x+y)=0; \\ x+y+z=5; \\ xy+yz+xz=8. \end{cases}$$

Решим каждую систему в отдельности. Преобразуем первую:

$$\begin{cases} y=x; \\ 2x+z=5; \\ x^2+2xz=8; \\ x^2+\lambda+2\mu x=0; \\ 3\lambda+10\mu+8=0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} y=x; \\ z=5-2x; \\ x^2+2x(5-2x)=8 \ \Leftrightarrow \ 3x^2-10x+8=0; \\ x^2+\lambda+2\mu x=0; \\ 3\lambda+10\mu+8=0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} y = x; \\ z = 5 - 2x; \\ \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ x = \dfrac{4}{3}; \end{array} \right. \\ x^2 + \lambda + 2\mu x = 0; \\ 3\lambda + 10\mu + 8 = 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x = 2; \\ y = 2; \\ z = 1; \\ 4 + \lambda + 4\mu = 0; \\ 3\lambda + 10\mu + 8 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \dfrac{4}{3}; \\ y = \dfrac{4}{3}; \\ z = \dfrac{7}{3}; \\ \dfrac{16}{9} + \lambda + \dfrac{8}{3}\mu = 0; \\ 3\lambda + 10\mu + 8 = 0, \end{cases}$$

откуда получаем первые две точки, подозрительные на экстремум:

$$\begin{cases} x_1 = 2; \\ y_1 = 2; \\ z_1 = 1; \\ \lambda_1 = 4; \\ \mu_1 = -2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{4}{3}; \\ y_2 = \dfrac{4}{3}; \\ z_2 = \dfrac{7}{3}; \\ \lambda_2 = \dfrac{16}{9}; \\ \mu_2 = -\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Преобразуем теперь вторую систему:

$$\begin{cases} z = -\mu; \\ 3\lambda + 10\mu + 8 = 0; \\ xy + \lambda + \mu(x+y) = 0; \\ x + y + z = 5; \\ xy + yz + xz = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -\mu; \\ \lambda = -\dfrac{10}{3}\mu - \dfrac{8}{3}; \\ xy - \dfrac{10}{3}\mu - \dfrac{8}{3} + \mu(x+y) = 0; \\ (x+y) - \mu = 5; \\ xy - (y+x)\mu = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -\mu; \\ \lambda = -\dfrac{10}{3}\mu - \dfrac{8}{3}; \\ x + y = \mu + 5; \\ xy = \dfrac{10}{3}\mu + \dfrac{8}{3} - \mu(\mu+5); \\ \dfrac{10}{3}\mu + \dfrac{8}{3} - 2\mu(\mu+5) = 8 \Leftrightarrow 3\mu^2 + 10\mu + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \mu = -2; \\ \mu = -\dfrac{4}{3}; \end{array}\right. \\ z = -\mu; \\ \lambda = -\dfrac{10}{3}\mu - \dfrac{8}{3}; \\ x + y = \mu + 5; \\ xy = \dfrac{10}{3}\mu + \dfrac{8}{3} - \mu(\mu+5); \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \mu = -2; \\ z = 2; \\ \lambda = 4; \\ x + y = 3; \\ xy = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} \mu = -\dfrac{4}{3}; \\ z = \dfrac{4}{3}; \\ \lambda = \dfrac{16}{9}; \\ x + y = \dfrac{11}{3}; \\ xy = \dfrac{28}{9}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решая эти две системы уравнений, получаем еще следующие 4 точки, подозрительные на экстремум:

$$\begin{cases} x_3 = 1; \\ y_3 = 2; \\ z_3 = 2; \\ \lambda_3 = 4; \\ \mu_3 = -2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = 2; \\ y_4 = 1; \\ z_4 = 2; \\ \lambda_4 = 4; \\ \mu_4 = -2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_5 = \dfrac{4}{3}; \\ y_5 = \dfrac{7}{3}; \\ z_5 = \dfrac{4}{3}; \\ \lambda_5 = \dfrac{16}{9}; \\ \mu_5 = -\dfrac{4}{3}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_6 = \dfrac{7}{3}; \\ y_6 = \dfrac{4}{3}; \\ z_6 = \dfrac{4}{3}; \\ \lambda_6 = \dfrac{16}{9}; \\ \mu_6 = -\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Найдем теперь все вторые частные производные функции Ψ:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} = z + \mu, \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z} = y + \mu, \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z} = x + \mu$$

и исследуем знак квадратичной формы

$$\Phi(\bar{h}) = 2((z+\mu)h_1h_2 + (y+\mu)h_1h_3 + (x+\mu)h_2h_3)$$

при условиях связи

$$\begin{cases} (\operatorname{grad} F_1, \bar{h}) = h_1 + h_2 + h_3 = 0; \\ (\operatorname{grad} F_2, \bar{h}) = (y+z)h_1 + (x+z)h_2 + (x+y)h_3 = 0 \end{cases}$$

в каждой из шести найденных точек.

В точке $M_1(2;2;1)$, для которой $\lambda_1 = 4$, $\mu_1 = -2$, квадратичная форма имеет вид $\Phi(\bar{h}) = -2h_1h_2$, а при условиях связи

$$\begin{cases} h_1 + h_2 + h_3 = 0; \\ 3h_1 + 3h_2 + 4h_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_3 = 0; \\ h_1 + h_2 = 0 \Rightarrow h_1 = -h_2 \end{cases}$$

является положительно определенной, так как $\Phi(\bar{h}) = 2h_1^2$, т. е. $M_1(2;2;1)$ — точка условного минимума. Точки $M_3(1;2;2)$ и $M_1(2;1;2)$, для которых $\lambda = 4$, $\mu = -2$, также являются точками локального минимума и $u_{\min} = 4$.

В точке $M_2\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$, для которой $\lambda_2 = \frac{16}{9}$, $\mu_2 = -\frac{4}{3}$, квадратичная форма имеет вид $\Phi(\bar{h}) = 2h_1h_2$, а при условиях связи

$$\begin{cases} h_1 + h_2 + h_3 = 0; \\ \frac{11}{3}h_1 + \frac{11}{3}h_2 + \frac{8}{3}h_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 + h_2 + h_3 = 0; \\ 11h_1 + 11h_2 + 8h_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_3 = 0; \\ h_1 + h_2 = 0 \Rightarrow h_1 = -h_2 \end{cases}$$

является отрицательно определенной, так как $\Phi(\bar{h}) = -2h_1^2$, т. е. $M_2\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$ — точка условного максимума. Точки $M_5\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right)$ и $M_6\left(\frac{7}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$, для которых $\lambda = \frac{16}{9}$, $\mu = -\frac{4}{3}$, также являются точками локального максимума и $u_{\max} = \frac{4\cdot 4\cdot 7}{3^3} = \frac{112}{27}$.

Пример 4. Найти экстремум функции

$$u = xy + yz, \quad y > 0,$$

при условиях связи

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2; \\ y + z = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} F_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2 = 0; \\ F_2(x,y,z) = y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Составим функцию Лагранжа

$$\Psi = xy + yz + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 2) + \mu \cdot (y + z - 2)$$

и выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0; \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = x + z + 2\lambda y + \mu = 0; \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial z} = y + \mu = 0; \\ x^2 + y^2 = 2; \\ y + z = 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2 - y; \\ y = -2\lambda x; \\ \mu = 2\lambda x; \\ x + (2 + 2\lambda x) - 4\lambda^2 x + 2\lambda x = 0 \;\Leftrightarrow\; (4\lambda^2 - 4\lambda - 1)x = 2; \\ x^2 + 4\lambda^2 x^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; x^2(1 + 4\lambda^2) = 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2 - y; \\ y = -2\lambda x; \\ \mu = 2\lambda x; \\ x = \dfrac{2}{(2\lambda - 1)^2 - 2}, \quad (2\lambda - 1)^2 - 2 \neq 0; \\ (1 + 4\lambda^2) \cdot \dfrac{4}{((2\lambda - 1)^2 - 2)^2} = 2. \end{cases}$$

Решим последнее уравнение этой системы:

$$2(1 + 4\lambda^2) = ((2\lambda - 1)^2 - 2)^2,$$

$$8\lambda^2 + 2 = (2\lambda - 1)^4 - 4(2\lambda - 1)^2 + 4,$$

$$(2\lambda - 1)^4 - 4(2\lambda - 1)^2 - 2(4\lambda^2 - 1) = 0,$$

$$(2\lambda - 1)^2(2\lambda - 1 - 2)(2\lambda - 1 + 2) - 2(2\lambda - 1)(2\lambda + 1) = 0,$$

$$(2\lambda - 1)(2\lambda + 1)((2\lambda - 1)(2\lambda - 3) - 2) = 0,$$

$$(2\lambda - 1)(2\lambda + 1)(4\lambda^2 - 8\lambda + 1) = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2}, \quad \lambda_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3} \pm 1)^2}{4}.$$

Таким образом, мы получили четыре точки, подозрительные на экстремум:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{2}; \\ x_1 = -1; \\ y_1 = 1; \\ z_1 = 1; \\ \mu_1 = -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}; \\ x_2 = 1; \\ y_2 = 1; \\ z_2 = 1; \\ \mu_2 = -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_3 = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{2} = \dfrac{(\sqrt{3} + 1)^2}{4}; \\ x_3 = \dfrac{2}{(\sqrt{3} + 1)^2 - 2} = \dfrac{2}{2 + 2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{1 + \sqrt{3}}; \\ y_3 = -\dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} < 0 \ \ (!!!); \\ z_3 = \dfrac{5 + \sqrt{3}}{2}; \\ \mu_3 = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_4 = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{2} = \dfrac{(\sqrt{3} - 1)^2}{4}; \\ x_4 = \dfrac{2}{(\sqrt{3} - 1)^2 - 2} = \dfrac{2}{2 - 2\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3} - 1} = -\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}; \\ y_4 = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}; \\ z_4 = \dfrac{5 - \sqrt{3}}{2}; \\ \mu_4 = -\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}, \end{cases}$$

из которых третья не удовлетворяет условию $y > 0$ и поэтому в дальнейшем не рассматривается.

Найдем теперь все вторые частные производные функции Лагранжа Ψ:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z} = 1, \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = 0$$

и исследуем знак квадратичной формы

$$\Phi(\bar{h}) = 2\lambda h_1^2 + 2h_1h_2 + 2\lambda h_2^2 + 2h_2h_3$$

при условиях связи

$$\begin{cases} (\operatorname{grad} F_1, \bar{h}) = 2xh_1 + 2yh_2 = 0; \\ (\operatorname{grad} F_2, \bar{h}) = h_2 + h_3 = 0 \end{cases}$$

в каждой из трех найденных точек.

В точке $M_1(-1;1;1)$, для которой $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$, квадратичная форма имеет вид $\Phi(\bar{h}) = h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2 + 2h_2h_3$ и при условиях связи

$$\begin{cases} -2h_1 + 2h_2 = 0; \\ h_2 + h_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_2 = h_1; \\ h_3 = -h_1 \end{cases}$$

является положительно определенной, так как $\Phi(\bar{h}) = h_1^2 + 2h_1^2 + h_1^2 - 2h_1^2 = 2h_1^2$, т. е. $M_1(-1;1;1)$ — точка условного минимума и $u_{\min} = -1 + 1 = 0$.

В точке $M_2(1;1;1)$, для которой $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$, квадратичная форма имеет вид $\Phi(\bar{h}) = -h_1^2 + 2h_1h_2 - h_2^2 + 2h_2h_3$ и при условиях связи

$$\begin{cases} 2h_1 + 2h_2 = 0; \\ h_2 + h_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_2 = -h_1; \\ h_3 = h_1 \end{cases}$$

является отрицательно определенной, так как $\Phi(\bar{h}) = -h_1^2 - 2h_1^2 - h_1^2 - 2h_1^2 = -6h_1^2$, т.е. $M_2(1;1;1)$ — точка условного максимума и $u_{\max} = 1 + 1 = 2$.

В точке M_4 квадратичная форма имеет вид

$$\Phi(\bar{h}) = (2-\sqrt{3})h_1^2 + 2h_1h_2 + (2-\sqrt{3})h_2^2 + 2h_2h_3$$

и при условиях связи

$$\begin{cases} -(\sqrt{3}+1)h_1 + (\sqrt{3}-1)h_2 = 0; \\ h_2 + h_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_2 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}h_1 = \dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}h_1 = (2+\sqrt{3})h_1; \\ h_3 = -h_2 = -(2+\sqrt{3})h_1 \end{cases}$$

преобразуется к виду

$$\Phi(\bar{h}) = (2-\sqrt{3})h_1^2 + 2(2+\sqrt{3})h_1^2 + (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^2h_1^2 - $$
$$- 2(2+\sqrt{3})^2h_1^2 = (2-\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}-\sqrt{3}(2+\sqrt{3})^2)h_1^2 =$$
$$= (6+\sqrt{3}-\sqrt{3}(7+4\sqrt{3}))h_1^2 = (6+\sqrt{3}-7\sqrt{3}-12)h_1^2 =$$
$$= (-6-6\sqrt{3})h_1^2 = -6(1+\sqrt{3})h_1^2 < 0,$$

т.е. является отрицательно определенной, и значит M_4 — точка условного максимума и $u_{\max} = \dfrac{-5+3\sqrt{3}}{2}$.

3. Наибольшее и наименьшее значения функции на множестве. В соответствии с теоремой Вейерштрасса числовая функция многих переменных, непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве пространства $\mathbf{R}^n$ (т.е. непрерывная на компакте), достигает на нем свои наибольшее и наименьшее значения. Точки, в которых функция достигает этих значений, могут быть как внутренними, так и граничными (т.е. либо в стационарных внутренних точках, либо на границе множества).

Пример 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

на множестве

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 100.$$

Вначале выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x = 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 4y = 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 6z = 0 \end{cases}$$

и найдем подозрительную на экстремум точку $M_0(0;0;0)$.

Найдем все вторые частные производные функции u:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 6,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$$

Матрица квадратичной формы в точке $M_0(0;0;0)$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

все ее главные миноры

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = 8 > 0, \quad \Delta_3 = \det A = 48 > 0$$

положительны, а значит $M_0(0;0;0)$ является точкой локального минимума и $u_{\min} = 0$. (Заметим, что этот нехитрый результат можно получить и без проведения подобных исследований, так как $u \geq 0$.)

Исследуем теперь функцию на экстремум на поверхности шара $x^2+y^2+z^2=100$. Составим функцию Лагранжа

$$\Psi = x^2+2y^2+3z^2+\lambda\cdot(x^2+y^2+z^2-100),$$

выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Psi}{\partial x} = 2x+2\lambda x = 0; \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial y} = 4y+2\lambda y = 0; \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial z} = 6z+2\lambda z = 0; \\ x^2+y^2+z^2=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(1+\lambda)=0; \\ 2y(2+\lambda)=0; \\ 2z(3+\lambda)=0; \\ x^2+y^2+z^2=100 \end{cases}$$

и найдем 6 точек, подозрительных на экстремум:

$$\begin{aligned} &M_{1,2}(\pm10;0;0) \quad \text{при} \quad \lambda=-1, \\ &M_{3,4}(0;\pm10;0) \quad \text{при} \quad \lambda=-2, \\ &M_{5,6}(0;0;\pm10) \quad \text{при} \quad \lambda=-3. \end{aligned}$$

В других точках сферы экстремумов нет, так как $u(M_{1,2})=100$, $u(M_{3,4})=200$, $u(M_{5,6})=300$, поэтому $u_{\min}=u(0;0;0)=0$ и $u_{\max}=u(M_{5,6})=300$.

Этот же результат можно получить, проведя полное исследование. Действительно, найдем все вторые частные производные функции Лагранжа Ψ:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=2+2\lambda, \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=4+2\lambda, \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=6+2\lambda,$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z}=0$$

и исследуем знак квадратичной формы

$$\Phi(\bar{h})=(2+2\lambda)h_1^2+(4+2\lambda)h_2^2+(6+2\lambda)h_3^2$$

при условии связи

$$2xh_1+2yh_2+2zh_3=0$$

в каждой из трех пар найденных точек.

В точках $M_{1,2}(\pm 10; 0; 0)$ при $\lambda = -1$ форма $\Phi(\bar{h}) = 2h_2^2 + 4h_3^2 > 0$ положительно определена, значит в этих точках достигается минимум значений функции на сфере (но не в шаре).

В точках $M_{3,4}(0; \pm 10; 0)$ при $\lambda = -2$ форма $\Phi(\bar{h}) = -2h_1^2 + 2h_3^2$ неопределенная, значит в этих точках нет экстремумов.

И наконец, в точках $M_{5,6}(0; 0; \pm 10)$ при $\lambda = -3$ форма $\Phi(\bar{h}) = -4h_1^2 - 2h_2^2 < 0$ отрицательно определена, и значит в этих точках достигается максимум значений функции как на сфере, так и в шаре.

Библиографический список

1. *Ильин, В. А.* Математический анализ: в 2 т. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — М.: ИД Юрайт, 2013. — Т. 1. — 660 с.

2. *Ильин, В. А.* Математический анализ: в 2 т. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — М.: ИД Юрайт, 2013. — Т. 2. — 357 с.

3. *Фихтенгольц, Г. М.* Основы математического анализа: в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб.: Лань, 2004. — Т. 1. — 446 с.

4. *Фихтенгольц, Г. М.* Основы математического анализа: в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб.: Лань, 2004. — Т. 2. — 464 с.

5. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа: в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Дрофа, 2008. — Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. — 704 с.

6. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа: в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Дрофа, 2004. — Т. 2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. — 720 с.

7. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа: в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Дрофа, 2006. — Т. 3. Гармонический анализ. Элементы функционального анализа. — 352 с.

Дополнительные учебники

8. *Архипов, Г. И.* Лекции по математическому анализу / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. — М.: Дрофа, 2008. — 640 с.

9. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб.: Лань, 2009. — Т. 1. — 608 с.

10. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб.: Лань, 2009. — Т. 2. — 800 с.

11. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. — СПб. : Лань, 2009. — Т. 3. — 656 с.

12. *Никольский, С. М.* Курс математического анализа : в 2 т. / С. М. Никольский. — М. : Наука, 1983. — Т. 1. — 468 с.

13. *Никольский, С. М.* Курс математического анализа : в 2 т. / С. М. Никольский. — М. : Наука, 1983. — Т. 2. — 448 с.

14. *Тер-Крикоров, А. М.* Курс математического анализа / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 672 с.

15. *Ильин, В. А.* Основы математического анализа : в 2 т. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — Т. 1. — 648 с.

16. *Ильин, В. А.* Основы математического анализа : в 2 т. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — Т. 2. — 464 с.

17. *Камынин, Л. И.* Курс математического анализа : в 2 т. / Л. И. Камынин. — М. : Изд-во МГУ, 2001. — Т. 1. — 400 с.

18. *Камынин, Л. И.* Курс математического анализа : в 2 т. / Л. И. Камынин. — М. : Изд-во МГУ, 2001. — Т. 2. — 624 с.

19. *Зорич, В. А.* Математический анализ : в 2 т. / В. А. Зорич. — М. : МЦНМО, 2002. — Т. 1. — 664 с.

20. *Зорич, В. А.* Математический анализ : в 2 т. / В. А. Зорич. — М. : МЦНМО, 2002. — Т. 2. — 794 с.

21. *Курант, Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 2 т. / Р. Курант. — М. : Наука, 1967. — Т. 1. — 704 с.

22. *Курант, Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 2 т. / Р. Курант. — М. : Наука, 1970. — Т. 2. — 672 с.

23. *Рудин, У.* Основы математического анализа / У. Рудин. — М. : Мир, 1976. — 320 с.

Основные задачники

24. *Демидович, Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — М. : АСТ, 2009. — 560 с.

25. Математический анализ в вопросах и задачах : в 2 т. / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев, А. А. Шишкин. — СПб. : Лань, 2008. — 480 с.

26. *Виноградова, И. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу : в 2 т. / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. — М. : Дрофа, 2001. — Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление. — 728 с.

27. *Виноградова, И. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу : в 2 т. / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. — М. : Дрофа, 2004. — Т. 2. Ряды, несобственные интегралы, ряды Фурье, преобразование Фурье. — 712 с.

28. Сборник задач по математическому анализу : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. — 496 с.

29. Сборник задач по математическому анализу : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 2. Интегралы. Ряды. — 505 с.

30. Сборник задач по математическому анализу : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 3. Функции нескольких переменных. — 473 с.

Дополнительные задачники

31. *Марон, И. А.* Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной / И. А. Марон. — СПб. : Лань, 2008. — 400 с.

32. Задачник по курсу математического анализа : в 2 т. / Н. Я. Виленкин [и др.]. — М. : Просвещение, 1971. — Т. 1. — 343 с.

33. Задачник по курсу математического анализа : в 2 т. / Н. Я. Виленкин [и др.]. — М. : Просвещение, 1971. — Т. 2. — 336 с.

34. *Очан, Ю. С.* Сборник задач по математическому анализу / Ю. С. Очан. — М.: Просвещение, 1981. — 271 с.

35. *Шибинский, В. М.* Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа / В. М. Шибинский. — М.: Высш. шк., 2007. — 544 с.

36. *Данко, П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 т. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Г. Я. Кожевников. — М.: «ОНИКС 21 век»: Мир и образование, 2003. — Т. 1. — 304 с.

37. *Данко, П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 т. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Г. Я. Кожевников. — М.: «ОНИКС 21 век»: Мир и образование, 2003. — Т. 2. — 416 с.

38. *Запорожец, Г. И.* Руководство к решению задач по математическому анализу / Г. И. Запорожец. — М.: Высш. шк., 1966. — 464 с.

Учебное издание

Фалалеев Михаил Валентинович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В четырех частях
Часть 2

ISBN 978-5-9624-0824-8 (ч. 2)
ISBN 978-5-9624-0822-4

Редактор *Э. А. Невзорова*
Компьютерный набор *М. В. Фалалеев*
Макет и рисунки подготовлены при помощи системы
LaTeX в РИО ИДСТУ СО РАН *Н. В. Починской*

Темплан 2013 г. Поз. 88
Подписано к печати 12.09.2013. Формат 60×90 1/16
Уч.-изд. л. 5,0. Усл. печ. л. 8,6. Тираж 100 экз. Заказ 91

Издательство ИГУ
664003, Иркутск, бульвар Гагарина, 36